

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Pour toute matrice $M \in M_p(\mathbf{R})$, on note M^\top sa transposée et on rappelle que :

$$\forall(M, N) \in (M_p(\mathbf{R}))^2, \quad (MN)^\top = N^\top M^\top.$$

L'espace $E = \mathbf{R}^p$ est muni de son produit scalaire canonique :

$$\forall(X, Y) \in E^2, \quad (X|Y) = X^\top Y$$

et pour tout vecteur X de E , sa norme est notée :

$$\|X\| = \sqrt{X^\top X}.$$

Soit n un **entier relatif** supérieur ou égal à -1 .

On dit qu'une matrice $A \in M_p(\mathbf{R})$ est de type n lorsque : $A^\top = A^n$.

1. Quelques exemples.

- 1.1 Déterminer l'ensemble des matrices de $M_p(\mathbf{R})$ de type 0.
- 1.2 Déterminer l'ensemble des matrices de $M_p(\mathbf{R})$ de type 1.
- 1.3 Déterminer l'ensemble des matrices de $M_p(\mathbf{R})$ de type -1 .

En donner un exemple différent de la matrice identité lorsque $p = 4$.

On suppose désormais que n est supérieur ou égal à 2.

2. **Dans cette question et uniquement dans cette question**, on suppose $p = 3$ et pour tout réel θ , on note :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

- 2.1 Démontrer que l'on a : $\forall m \in \mathbf{N}, (A(\theta))^m = A(m\theta)$.
- 2.2 Déterminer alors l'ensemble des réels θ tels que $A(\theta)$ soit une matrice de type n .

On revient au cas général avec $p \geq 3$.

3. Soit A une matrice de $M_p(\mathbf{R})$ de type n .

3.1 Établir l'égalité : $A^{n^2} = A$.

3.2 On note $B = A^{n+1}$.

3.2.1 Montrer que $B^n = B$.

3.2.2 Démontrer que B est une matrice symétrique.

3.2.3 Prouver que les valeurs propres de B sont positives ou nulles.

On pourra examiner $X^\top B X$ où X est un vecteur bien choisi de E .

3.2.4 Déterminer les valeurs propres de la matrice B , lorsque B n'est pas la matrice nulle ni la matrice identité.

3.2.5 Prouver que B est une matrice de projection orthogonale.
On précisera ses éléments caractéristiques.

3.3 Prouver que $\text{Ker}(B) = \text{Ker}(A)$.

3.4 Démontrer que $\text{Im}(B) = \text{Im}(A)$.

3.5 Prouver que $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

3.6 Démontrer que l'on a : $\forall X \in \text{Im}(A), \|AX\| = \|X\|$.

3.7 Prouver que si A est de plus inversible, alors A est aussi de type -1 .

4. Prouver enfin que si A est à la fois de type n et de type $n + 1$, alors A est une matrice de projecteur orthogonal.