

Exercice : CCINP PSI 2023

Soit une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt.$$

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $t \mapsto \cos(x \sin(t))$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ par composée de fonctions continues sur \mathbf{R} , donc l'intégrale $\int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$ existe. f est bien définie sur \mathbf{R} .

2. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \times [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, t) & \longmapsto & \cos(x \sin(t)) \end{array}$

- Pour tout $t \in [0, \pi]$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbf{R} et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a, par dérivation d'une fonction composée :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin(t)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = -\sin^2(t) \cos(x \sin(t)).$$

- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ sont continues sur le segment $[0, \pi]$, donc sont intégrables sur $[0, \pi]$.

- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, \pi]$, par produit de fonctions continues.

• **Hypothèse de domination :**

La fonction cosinus à valeurs dans $[-1, 1]$, donc

$$\forall (x, t) \in \mathbf{R} \times [0, \pi] \quad \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = \left| \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) \right| \leq \sin^2(t)$$

$\varphi : t \mapsto \sin^2(t)$ est une fonction continue sur le segment $[0, \pi]$ donc est intégrable sur ce segment.

Par le théorème de la classe C^k pour les intégrales à paramètre, on sait alors que :

$$f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbf{R} \text{ avec } \forall x \in \mathbf{R} \quad f'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt$$

$$\text{et } f''(x) = \int_0^\pi \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) dt = - \int_0^\pi \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) dt$$

3. Soit la fonction $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall (x, t) \in \mathbf{R}^2, \quad h(x, t) = \cos(t) \sin(x \sin(t)).$$

Soit $x \in \mathbf{R}$, on pose $u(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \sin(x \sin(t))$. Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbf{R} , alors u est dérivable sur \mathbf{R} et par composée v est dérivable sur \mathbf{R} .

Par produit la fonction $t \mapsto h(x, t) = u(t)v(t)$ est dérivable sur \mathbf{R} , donc la fonction

$$\frac{\partial h}{\partial t} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) \quad \text{existe et}$$

$$\forall (x, t) \in \mathbf{R}^2 \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$$

$$\forall (x, t) \in \mathbf{R}^2 \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin(t)) + x \cos^2(t) \cos(x \sin(t))$$

4. Avec le résultat de la question 2, en utilisant $-\sin^2(t) = \cos^2(t) - 1$ et avec la linéarité de l'intégrale, on a pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x f''(x) + f'(x) &= \int_0^\pi -x \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \cos(x \sin(t)) dt \\ &= \int_0^\pi (-\sin(t) \sin(x \sin(t)) + x \cos^2(t) \cos(x \sin(t)) - x \cos(x \sin(t))) dt \\ &= \int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) dt - x f(x) \end{aligned}$$

$$x f''(x) + f'(x) = [h(x, t)]_{t=0}^{t=\pi} - x f(x)$$

or $h(x, 0) = 0 = h(x, \pi)$ puisque $\sin(0) = 0 = \sin(\pi)$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad x f''(x) + f'(x) = -x f(x)$$

f est donc solution sur \mathbf{R} de l'équation différentielle (E) : $xy'' + y' + xy = 0$.

5. On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière notée $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Notons $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait que y est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ avec

$$\forall x \in] -R, R[\quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

y est solution de (E) $\iff \forall x \in] -R, R[\quad xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}}_{k=n-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}}_{k=n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}}_{k=n+1} = 0 \\
&\iff \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)k a_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} k a_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} x^k = 0 \\
&\iff a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (k(k+1)a_{k+1} + k a_{k+1} + a_{k-1}) x^k = 0 \\
&\iff a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} ((k+1)^2 a_{k+1} + a_{k-1}) x^k = 0 \text{ pour tout } x \in]-R, R[
\end{aligned}$$

par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, on obtient :

$$a_1 = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbf{N}^* \quad (k+1)^2 a_{k+1} + a_{k-1} = 0$$

ce qui revient à $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 2 \quad a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}$.

$$\text{On a donc } a_1 = 0 \text{ et } \forall n \geq 2 \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

Remarque : on pouvait obtenir a_1 par une autre méthode. En effet si y est solution de (E), on a $\forall x \in]-R, R[\quad xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$, alors pour $x = 0$ on obtient $y'(0) = 0$, or $y'(0) = a_1$, et donc $a_1 = 0$.

6. D'après le développement en série entière de la fonction cosinus sur \mathbf{R} , on sait que

$$\forall (x, t) \in \mathbf{R}^2 \quad \cos(x \sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x \sin(t))^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n}$$

On peut donc écrire

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt \text{ avec } \forall n \in \mathbf{N} \quad f_n : t \mapsto (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n}$$

• Pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc est bornée sur ce segment, et $\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, \pi]} |f_n(t)|$ existe dans \mathbf{R}^+ .

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [0, \pi] \quad |f_n(t)| = \frac{|\sin^{2n}(t)|}{(2n)!} \cdot |x^{2n}| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Notons $\forall n \in \mathbf{N} \quad \alpha_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, la suite (α_n) vérifie $\forall n \in \mathbf{N} \quad \|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$ et la série $\sum \alpha_n$

converge puisque, par développement en série entière, $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(x)$.

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$ et donc aussi uniformément sur ce segment, alors par théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on sait que la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^\pi f_n(t) dt$ converge et

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt$$

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n W_n}{(2n)!} x^{2n}, \text{ donc } f \text{ est développable en série entière sur } \mathbf{R}.$$

On a obtenu $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $b_{2n+1} = 0$ et $b_{2n} = \frac{(-1)^n W_n}{(2n)!}$.

2ème méthode : On peut aussi utiliser le second théorème d'intégration terme à terme, celui sur un intervalle :

Soit $x \in \mathbf{R}$.

- $\forall n \in \mathbf{N}$ f_n est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc est intégrable sur cet intervalle.
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, \pi]$ (puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \cos(x \sin(t))$).
- La fonction $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \cos(x \sin(t))$ est continue (par morceaux) sur $[0, \pi]$.
- Comme vu dans la méthode précédente : $\forall t \in [0, \pi] \quad |f_n(t)| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, alors

$$\int_0^\pi |f_n(t)| dt \leq \pi \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Comme vu dans la méthode précédente, la série $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge (DSE de la fonction cosinus hyperbolique). Alors par comparaison la série à termes positifs $\sum \int_0^\pi |f_n(t)| dt$ converge.

Par théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle on sait que la série $\sum \int_0^\pi f_n(t) dt$ converge et $f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt$.

7. D'après le résultat vu en question 5, si $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E) alors $a_1 = 0$ et

$$\forall n \geq 2 \quad a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}.$$

Par récurrence on obtient alors que $\forall k \in \mathbf{N} \quad a_{2k+1} = 0$.

Si on impose $y(0) = \pi$, alors $a_0 = \pi$ et $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad a_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2} a_{2k-2}$.

Cette relation de récurrence permet d'obtenir que la suite (a_{2k}) est uniquement déterminée par la donnée de $a_0 = \pi$.

On en déduit que si y est une solution de (E) développable en série entière vérifiant $y(0) = \pi$,

alors y est unique, et la suite (a_n) est donnée par

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbf{N} & a_{2k+1} = 0 \\ a_0 = \pi \\ \forall k \in \mathbf{N}^* & a_{2k} = \frac{-1}{2k} a_{2k-2} \end{cases}.$$

Or la fonction f est une solution de (E) développable en série entière et $f(0) = \int_0^\pi 1 \cdot dt = \pi$,

donc f est bien l'unique solution de (E) développable en série entière vérifiant $f(0) = \pi$.

8. Les questions 6 et 7 donnent :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n W_n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$$

Avec $a_0 = \pi$ et $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_{2n} = \frac{-1}{2n} a_{2n-2}$.

On aura donc $a_2 = -\frac{\pi}{2^2}$, $a_4 = \frac{-1}{4^2} a_2 = \frac{(-1)^2}{2^2 \cdot 4^2} \pi = \frac{(-1)^2}{2^4 (2!)^2} \pi$.

Supposons que $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} \pi$ alors

$$a_{2n+2} = \frac{-1}{(2n+2)^2} a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^2 (n+1)^2 \cdot 2^{2n} \cdot n!^2} \pi = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+2} (n+1)!^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2(n+1)} (n+1)!^2}$$

On a donc obtenu par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n \pi}{2^{2n} n!^2}$.

Par unicité du développement en série entière de f , on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \frac{(-1)^n}{(2n)!} W_n = a_{2n} = \frac{(-1)^n \pi}{2^{2n} n!^2}$$

ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad W_n = \frac{\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

L'expression des coefficients a_{2n} peut être donnée soit dans la question 7 (ce qui justifie bien l'unicité des coefficients a_n), soit seulement ici en question 8.