

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Pour toute matrice $M \in M_p(\mathbf{R})$, on note M^\top sa transposée et on rappelle que :

$$\forall (M, N) \in (M_p(\mathbf{R}))^2, \quad (MN)^\top = N^\top M^\top.$$

L'espace $E = \mathbf{R}^p$ est muni de son produit scalaire canonique :

$$\forall (X, Y) \in E^2, \quad (X|Y) = X^\top Y$$

et pour tout vecteur X de E , sa norme est notée :

$$\|X\| = \sqrt{X^\top X}.$$

Soit n un **entier relatif** supérieur ou égal à -1 .

On dit qu'une matrice $A \in M_p(\mathbf{R})$ est de type n lorsque : $A^\top = A^n$.

1. Quelques exemples.

1.1 Soit $A \in M_p(\mathbf{R})$.

$$A \text{ est de type } 0 \iff A^\top = A^0$$

$$\iff A^\top = I_p$$

$$\iff A = I_p^\top = I_p$$

L'ensemble des matrices de $M_p(\mathbf{R})$ de type 0 est $\{I_p\}$.

1.2 Soit $A \in M_p(\mathbf{R})$. A est de type 1 si et seulement si $A^\top = A$, donc l'ensemble des matrices de $M_p(\mathbf{R})$ de type 1 est $S_p(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de $M_p(\mathbf{R})$ symétriques.

1.3 Soit $A \in M_p(\mathbf{R})$. A est de type -1 si et seulement si $A^\top = A^{-1}$, donc l'ensemble des matrices de $M_p(\mathbf{R})$ de type -1 est $O_p(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de $M_p(\mathbf{R})$ orthogonales.

On sait qu'une matrice de $M_4(\mathbf{R})$ est orthogonale si et seulement si les colonnes de cette

matrices forment une base orthonormale de $M_{41}(\mathbf{R})$, alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est en

particulier une matrice de type -1 différente de l'identité.

On suppose désormais que n est supérieur ou égal à 2.

2. **Dans cette question et uniquement dans cette question**, on suppose $p = 3$ et pour tout réel θ , on note :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

2.1 Par convention $A(\theta)^0 = I_3$ et on remarque que $A(0) = I_3$ donc $A(\theta)^m = A(m.\theta)$ pour $m = 0$.

Soit $m \in \mathbf{N}$ si $A^m(\theta) = A(m\theta)$ alors

$$\begin{aligned} A^{m+1}(\theta) &= A^m(\theta) \times A \\ &= A(m\theta) \times A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(m\theta) & -\sin(m\theta) \\ 0 & \sin(m\theta) & \cos(m\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(m\theta)\cos(\theta) - \sin(m\theta)\sin(\theta) & -\cos(m\theta)\sin(\theta) - \sin(m\theta)\cos(\theta) \\ 0 & \sin(m\theta)\cos(\theta) + \cos(m\theta)\sin(\theta) & -\sin(m\theta)\sin(\theta) + \cos(m\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

et d'après les formules trigonométriques

$$A^{m+1}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos((m+1)\theta) & -\sin((m+1)\theta) \\ 0 & \sin((m+1)\theta) & \cos((m+1)\theta) \end{pmatrix}$$

On a donc $A^0(\theta) = A(0\theta)$ et $A^m(\theta) = A(m\theta) \implies A^{m+1}(\theta) = A((m+1)\theta)$.

Par principe de récurrence : $\forall m \in \mathbf{N}$, $(A(\theta))^m = A(m\theta)$.

2.2 Par ce qui précède : $A^n(\theta) = A^T(\theta) \iff A(n\theta) = A^T(\theta)$.

On remarque que $A(\theta)^T = A(-\theta)$ puisque la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire, donc

$$\begin{aligned} A(\theta) \text{ est de type } n &\iff A(n\theta) = A(-\theta) \\ &\iff \begin{cases} \cos(n\theta) = \cos(-\theta) \\ \sin(n\theta) = \sin(-\theta) \end{cases} \\ &\iff n\theta \equiv -\theta[2\pi] \end{aligned}$$

$$A(\theta) \text{ est de type } n \iff \exists k \in \mathbf{Z} \quad (n+1)\theta = 2k\pi$$

$$A(\theta) \text{ est de type } n \text{ si et seulement si } \theta \in \left\{ \frac{2k\pi}{n+1}, \quad k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

On revient au cas général avec $p \geq 3$.

3. Soit A une matrice de $M_p(\mathbf{R})$ de type n .

3.1 $A^{n^2} = A^{n \times n} = (A^n)^n$ et puisque A est de type n on a :

$$A^{n^2} = (A^T)^n = (A^n)^T = (A^T)^T = A$$

3.2 On note $B = A^{n+1}$.

3.2.1 En utilisant le résultat de la question 3.1, on a :

$$B^n = (A^{n+1})^n = A^{n(n+1)} = A^{n^2+n} = A^{n^2} \cdot A^n = A \cdot A^n = A^{n+1} = B$$

On a donc bien $B^n = B$.

3.2.2 $B = A^{n+1} = A^n \cdot A = A^T \cdot A$ puisque A est de type n , donc

$$B^T = (A^T \cdot A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A = B$$

B est bien une matrice symétrique.

3.2.3 B est symétrique réelle, donc ses valeurs propres sont réelles.

Soit λ une valeur propre de B , il existe $X \in M_{p,1}(\mathbf{R})$ telle que $X \neq 0$ et $BX = \lambda X$.

D'une part $X^T \cdot B \cdot X = X^T(\lambda X) = \lambda X^T \cdot X = \lambda \|X\|^2$, et

d'autre part puisque $B = A^T \cdot A$ on a $X^T \cdot B \cdot X = X^T \cdot A^T \cdot A \cdot X = (AX)^T \cdot (AX)$ et $AX \in M_{p,1}(\mathbf{R})$ donc $X^T B X = \|AX\|^2$.

On en déduit que $\|AX\|^2 = \lambda \|X\|^2$ et puisque $X \neq 0$, on a $\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

Les valeurs propres de B sont donc positives ou nulles.

3.2.4 On suppose que $B \neq O_p$ et $B \neq I_p$.

- On a vu $B^n = B$ donc $X^n - X = X(X^{n-1} - 1)$ est un polynôme annulateur de B , les valeurs propres de B , qui sont réelles et positives, sont donc racines de $X(X^{n-1} - 1)$.

Les seules racines réelles positives de $X(X^{n-1} - 1)$ sont les réels 0 et 1 donc

$$Sp(B) \subset \{0, 1\}$$

- B est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable, donc $Sp(B)$ n'est pas vide.

Si $Sp(B) = \{0\}$ alors B est semblable à la matrice nulle et donc $B = O_p$, ce qui est exclu ici.

Si $Sp(B) = \{1\}$ alors B est semblable à la matrice diagonale I_p donc $B = I_p$ ce qui est exclu ici.

On en déduit que les valeurs propres de B sont les deux réels 0 et 1 : $Sp(B) = \{0, 1\}$.

3.2.5 • Si $B = O_p$ ou $B = I_p$ alors $B^2 = B$ et B est donc une matrice de projection, et puisque B est symétrique la projection est orthogonale.

- Si $B \neq O_p$ et $B \neq I_p$ alors on a vu précédemment que B est diagonalisable et $Sp(B) = \{0, 1\}$. Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale, dont les coefficients diagonaux valent 0 ou 1, telles que $B = P \cdot D \cdot P^{-1}$, alors

$B^2 = P.D^2.P^{-1}$ et $D^2 = D$ (d'après ses coefficients diagonaux), donc $B^2 = B$.

B est une matrice de projection et puisque B est symétrique, B est la matrice d'une projection orthogonale.

B est la matrice de la projection sur $Im(B) = Ker(B - I_p)$ parallèlement à $Ker(B)$.

3.3 On a vu : $B = A^{n+1} = A^T.A$.

- Si $X \in Ker(A)$ alors $BX = A^n.AX = A^n.0 = 0$ donc $Ker(A) \subset Ker(B)$.
- Si $X \in Ker(B)$, alors $BX = 0$, or $X^T BX = \|AX\|^2$ (vu en question 3.2.3), donc $\|AX\|^2 = 0$ et par séparation de la norme on obtient $AX = 0$ donc $X \in Ker(A)$ et donc $Ker(B) \subset Ker(A)$.

Par double inclusion on a montré : $Ker(B) = Ker(A)$.

3.4 • Si $Y \in Im(B)$ alors il existe $X \in M_{p,1}(\mathbf{R})$ tel que $Y = BX = A^{n+1}X = A(A^n X)$ donc $Y \in Im(A)$. On a donc $Im(B) \subset Im(A)$

- Par le théorème du rang $p = dimIm(A) + dimKer(A) = dimIm(B) + dimKer(B)$. Or $Ker(B) = Ker(A)$ donc $dimIm(A) = dimIm(B)$.

Finalement $Im(B) = Im(A)$.

3.5 Puisque B est la matrice d'une projection on sait que $Im(B)$ et $Ker(B)$ sont supplémentaires. De plus la projection est orthogonale donc $Im(B)$ et $Ker(B)$ sont orthogonaux.

Avec le résultat des questions 3.3 et 3.4 on obtient alors que $Im(A)$ et $Ker(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

3.6 On a déjà vu que pour tout X de $M_{p,1}(\mathbf{R})$: $\|AX\|^2 = X^T.B.X$.

Si $X \in Im(A)$ alors par la question 3.4 on a $X \in Im(B)$, or B est la matrice d'une projection donc $Im(B) = Ker(B - I_p)$ et donc $BX = X$, ce qui donne

$$\|AX\|^2 = X^T.B.X = X^T.X = \|X\|^2$$

Si $X \in Im(A)$ alors on a bien : $\|AX\| = \|X\|$.

3.7 On suppose que A est inversible, alors $Ker(A) = \{0\}$ et $Im(A) = M_{p,1}(\mathbf{R})$.

En utilisant le résultat de la question 3.6 on obtient alors : $\forall X \in M_{p,1}(\mathbf{R}), \|AX\| = \|X\|$, et donc A est une matrice orthogonale.

Par le (résultat de 1.3 on obtient que A est de type -1 .

4. Si A est à la fois de type n et de type $n + 1$, alors A est de type n et $B = A^{n+1} = A^T$ est une matrice de projecteur orthogonal d'après ce qui a été vu en question 3.2.5.

On en déduit que : $A^T = B = B^T = A$ et $A^2 = (B^T)^2 = B^2 = B = A^T = A$, donc A est une matrice de projecteur orthogonal.