

1 Calcul de limite - Croissances comparées - Équivalents

Exercice 1

Déterminer la limite de la suite de terme général u_n lorsque :

$$u_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^n - (-1)^n} \quad u_n = \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 3n + 1}$$

$$u_n = \sqrt[2n]{3^n + (-1)^n} \quad u_n = \frac{e^n}{n^2}$$

Déterminer un équivalent de u_n dans les cas suivants :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \quad u_n = n \sin \frac{1}{n^2} \quad u_n = \ln(n+1) - \ln(n) \quad u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 \quad u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n+1}$$

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad u_n = \sin\left(\frac{n^2 + n + 1}{n+1}\pi\right) \quad u_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha \text{ où } \alpha > 0$$

2 Deux suites à connaître

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 3

Soit $x \in \mathbf{R}$, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = \prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

1. Calculer $\sin\left(\frac{x}{2}\right) u_1$, puis $\sin\left(\frac{x}{2^2}\right) u_2$, puis $\sin\left(\frac{x}{2^3}\right) u_3$. Que remarque-t-on ?
2. En déduire une forme simplifiée de u_n . Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

3 Calcul asymptotique

Exercice 4

Soit $f : x \in \mathbf{R} \mapsto e^x + \arctan(x) - 1$.

Montrer que f^{-1} est définie au voisinage de 0 et déterminer son développement limité à l'ordre 2 en 0.

Exercice 5

Montrer que la courbe de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera.

Exercice 6

Déterminer des équivalents des fonctions suivantes :

- au voisinage de 0 :

$$\ln(\cos(x)) \quad \frac{\ln(1 + \tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}} \quad (x+1)^x - x^x$$

- au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \quad \sqrt{\ln(1+x) - \ln(x)}$$

4 Encadrements**Exercice 7**

Par encadrement, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

$$u_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$$

5 Suites solutions d'une équation**Exercice 8**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(x) = -2 + \sum_{k=0}^n x^k$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $[0, 1]$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 9

Si $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique réel x_n tel que $e^{x_n} + x_n = n$.

Etudier la suite de terme général (x_n) . Montrer que $x_n \sim \ln n$ puis que $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

6 Sommes de Riemann

Exercice 10

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

converge et déterminer sa limite.

2. Même question avec la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+2k+1}$$

3. Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{n+k} \right)$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 11

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$.

Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

7 Suites adjacentes

Exercice 13

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies par : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune. Déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près. Que peut-on conjecturer ?
2. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, démontrer la conjecture précédente.
3. Montrer que ℓ est irrationnel.

On pourra raisonner par l'absurde en écrivant $\ell = \frac{p}{q}$ et en utilisant l'encadrement :
 $u_q < \ell < v_q$.

8 Théorème de Césaro

Exercice 14

1. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un réel ℓ et on note $x_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}{n}$.
Montrer que la suite (x_n) converge vers ℓ .
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
 - (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.
 - (b) Montrer que $u_n \longrightarrow +\infty$.
 - (c) On note $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$. En utilisant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, déterminer un équivalent simple de u_n .