

Exercice 1

On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes strictement positifs qui convergent.

1. Montrer que $\sum u_n^2$ converge. Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose plus $u_n \geq 0$?
2. Déterminer la nature des séries : $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$, $\sum \frac{u_n}{1-u_n}$, $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$.
3. Déterminer la nature des séries $\sum \max(u_n, v_n)$, $\sum \sqrt{u_n v_n}$, $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$.

Exercice 2

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante à termes positifs telle que $\sum u_n$ converge.

1. Justifier que $2nu_{2n} \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.
2. Montrer que $nu_n \rightarrow 0$.

Exercice 3

Etudier la nature de la série numérique $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \cos\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$
2. $u_n = \sin\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$
3. $u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$
4. $u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}}$
5. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
6. $u_n = \frac{1}{n \cos^2(n)}$
7. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
8. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
9. $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$
10. $u_n = \frac{(-1)^n n^2}{n!}$
11. $u_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln(n)}$
12. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$
13. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^\alpha}{n}\right)$, où $\alpha > 0$
14. $u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$
15. $u_n = \binom{2n}{n} a^n$, où $a > 0$
16. $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^n$, où $\alpha > 0$
17. $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b : \ln(n+2)$, où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$

Exercice 4

Prouver la convergence de la série $\sum u_n$, puis calculer sa somme dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$
2. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
3. $u_n = \frac{n+1}{n!}$
4. $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n!}$
5. $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right)$ où $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 5

Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 6

On appelle série de Bertrand d'exposants α et β la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

On cherche à montrer que cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

1. Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série converge.
On pourra utiliser $n^\gamma u_n$ pour un certain réel γ bien choisi.
2. Montrer que si $\alpha < 1$, alors la série diverge.
On pourra utiliser nu_n .
3. En utilisant une comparaison série-intégrale, étudier la nature de la série dans le cas où $\alpha = 1$. On discutera selon les valeurs de β .
4. Conclure.

Exercice 7

Soit la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$$

1. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.
2. Soit (v_n) telle que $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad v_n = u_n - \frac{1}{2} \ln^2(n)$.
Étudier la monotonie et la convergence de (v_n) .

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $0 < u_0 \leq \frac{\pi}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.
2. En utilisant la série de terme général $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, déterminer la nature de la série $\sum u_n^2$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
3. En utilisant la suite de terme général $\omega_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ et le théorème de Cesaro, déterminer un équivalent de u_n . Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 9

Déterminer la nature et la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2}$.