

On considère une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée.

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par :

- P_n l'évènement « Pile apparaît au $n^{\text{ième}}$ lancer »

- F_n l'évènement « Face apparaît au $n^{\text{ième}}$ lancer ».

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour $n \geq 3$, on pose $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ et $U_n = \bigcup_{k=3}^n B_k$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ par : $u_1 = u_2 = 0$ et $\forall n \geq 2$ $u_n = P(U_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est monotone et convergente.
2. (a) Pour $n \geq 3$, calculer $P(B_n)$.
 - (b) Montrer, que pour tout $n \geq 3$, les évènements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.
 - (c) Calculer les valeurs de u_3, u_4 et u_5 .
3. Dans cette question, on suppose $n \geq 5$.
 - (a) Comparer les évènements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Préciser leurs probabilités respectives.
 - (b) Montrer que pour tout $n \geq 3$: $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.
 - (c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
 - (d) Quelle est la probabilité de l'évènement « Pile n'apparaît jamais au cours de l'expérience » ?
4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.
 - (a) Trouver des réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n = \alpha v_{n+2} + \beta v_{n+3}$.
 - (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n , en déduire que la série de terme général v_n converge.
 - (c) Montrer, sans utiliser la question précédente, que la série de terme général v_n converge et déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Fin de l'énoncé