

## 1 Exercice :

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . Soit un réel  $q \geq 2$  et  $N$  une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre  $q$ .

- 1 ▷ On pose  $X = q^N$ . Montrer que pour tout  $m \in \mathbf{N}$ ,  $X^m$  est d'espérance finie et calculer  $\mathbf{E}(X^m)$ .

On pose  $c_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - q^k}$ .

- 2 ▷ Déterminer  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum c_n x^n$ .

On pose alors  $\forall x \in ]-R, R[ \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ .

- 3 ▷ Montrer que :  $\forall x \in ]-R, R[ \quad f(qx) = (1 - x)f(x)$ .

- 4 ▷ En déduire, pour  $m \in \mathbf{N}$ , la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n q^{n(m+1)}$ .

- 4 ▷ Justifier l'existence d'une variable aléatoire  $U$  à valeurs dans  $\mathbf{N}$  telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}(U = n) = \mathbf{P}(N = n) \left(1 + \frac{n!c_n}{2}\right)$$

- 5 ▷ On pose  $Y = q^U$ . Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  suivent-elles la même loi ?

- 6 ▷ Montrer que, pour tout  $m \in \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{E}(X^m) = \mathbf{E}(Y^m)$ .

## 2 Problème :

### Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle  $] -1, +\infty[$  de  $\mathbf{R}$  est appelé  $I$  et  $\sigma$  et  $f$  sont les fonctions de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , définies par :

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt$$

**Calcul de  $\sigma(1)$** 

1 ▷ Déterminer le domaine de définition de  $\sigma$  puis justifier que  $\sigma$  est continue sur celui-ci.

2 ▷ Exhiber deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

puis vérifier que si  $t \in ]0, \pi]$ , alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

3 ▷ Justifier que, si  $\varphi$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $[0, \pi]$  dans  $\mathbf{R}$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0$$

et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

**Équivalents**

4 ▷ Déterminer le domaine de définition de  $f$  puis vérifier que

$$\forall x \in I, (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2) \quad (1)$$

5 ▷ Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , décroissante et convexe sur  $I$ .

6 ▷ Donner un équivalent simple de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $-1$ .

7 ▷ Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

8 ▷ Représenter graphiquement  $f$  en exploitant au mieux les résultats précédents.

**Développement en série entière**

Si  $n \in \mathbf{N}$ , on note  $D_n$  l'intégrale généralisée  $\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n dt$ .

9 ▷ Justifier que, si  $n \in \mathbf{N}$ , l'intégrale généralisée  $D_n$  est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$$

10 ▷ Calculer  $f'(0)$  et  $f'(1)$ .

11 ▷ Pour  $n \in \mathbf{N}$ , justifier l'existence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$  et la calculer.

12 ▷ Vérifier que si  $n \in \mathbf{N}^*$ , alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u} - 1}} du$$

puis que  $(-1)^n D_n - n! = O((n-1)!)$ .

(On rappelle l'inégalité de convexité :  $e^x - 1 \geq x$  pour  $x > 0$ .)

En déduire un équivalent simple de  $D_n$ .

13 ▷ Démontrer que  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ .

**Fin du sujet**