

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Le sujet est composé d'un problème et d'un exercice.

PROBLÈME : MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES ET CONVEXITÉ

Notations et résultats admis

- Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $M_n(\mathbf{R})$ (resp. $M_{n,1}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ (resp. $n \times 1$) à coefficients réels.
- La matrice identité de $M_n(\mathbf{R})$ est notée I_n .
- Si $A \in M_n(\mathbf{R})$, alors $\det(A)$ est le déterminant de la matrice A , $\text{Tr}(A)$ sa trace, $\text{Sp}(A)$ son spectre et $A^\top$ sa transposée.
- On note $S_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et à coefficients réels de taille $n \times n$.
- Sur $(M_{n,1}(\mathbf{R}))^2$, on définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\forall (X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbf{R}))^2, \quad \langle X, Y \rangle = X^\top Y$$

où $X^\top$ est la transposée de X . On admet que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbf{R})$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée.

- On admet que l'application $A \in M_n(\mathbf{R}) \mapsto \|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(A^\top A)}$ est une norme sur $M_n(\mathbf{R})$.
- On note $S_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices symétriques $S \in S_n(\mathbf{R})$ telles que :

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}), \quad \langle SX, X \rangle \geq 0 \quad (\text{resp.} \quad > 0).$$

- Soit C une partie non vide d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E . On dit que C est convexe si : pour tout $(x, y) \in C^2$ et tout $t \in [0, 1]$, $(1-t)x + ty \in C$.
- On admet que si C est une partie convexe d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E , alors pour tout $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in C^p$ et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, on a : $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in C$.
- Une application $f : C \rightarrow \mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

- Une application $f : C \rightarrow \mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel est dite concave si son opposé, $-f$, est convexe, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in C^2, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Partie 1 : Questions préliminaires

1. Montrer qu'une matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$ appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\text{Sp}(S) \subseteq \mathbf{R}_+$.

De même, on admettra dans la suite du problème que : $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\text{Sp}(S) \subseteq \mathbf{R}_+^*$.

2. Montrer que $S_n^+(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}(\mathbf{R})$ sont des parties convexes de $M_n(\mathbf{R})$. Sont-elles des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{R})$?
3. Montrer que, si $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, il existe $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que : $A = S^2$.
4. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. Montrer que, pour tout $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in I^p$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

Indication : on pourra procéder par récurrence sur p .

Partie 2 : Une première inégalité de convexité

Soit $M \in S_n^+(\mathbf{R})$ une matrice non nulle.

5. Montrer l'inégalité $\frac{\text{Tr}(M)}{n} \geq (\det(M))^{\frac{1}{n}}$.

Indication : on pourra montrer que $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.

On pourra dans la suite de cette partie utiliser, sans la prouver, l'inégalité ci-dessous :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in (\mathbf{R}_+)^p, \quad 2 \max(x_1, \dots, x_n) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - \prod_{k=1}^n x_k^{\frac{1}{n}} \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(x_k - \prod_{j=1}^n x_j^{\frac{1}{n}} \right)^2.$$

6. Exprimer $\|M\|_2$ en fonction des valeurs propres de M .
7. En déduire que :

$$\frac{\text{Tr}(M)}{n} - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \geq \frac{\|M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \text{Id}_n\|_2^2}{2n\|M\|_2}.$$

Partie 3 : On continue avec de la convexité

8. Soient $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in S_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbf{R})$ et $Q \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ telles que $B = QDQ^\top$ et $A = QQ^\top$. Que dire des éléments diagonaux de D si $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$?

Indication : on pourra utiliser la question ??.

9. Étudier la convexité de la fonction $t \mapsto \ln(1 + e^t)$.
10. Montrer l'inégalité :

$$\forall (A, B) \in (S_n^{++}(\mathbf{R}))^2, \quad (\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}.$$

11. Montrer que, si A et B appartiennent à $S_n^{++}(\mathbf{R})$, alors :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \det((1-t)A + tB) \geq (\det(A))^{1-t}(\det(B))^t.$$

12. Que peut-on en déduire de la fonction $\ln \circ \det$ sur $S_n^{++}(\mathbf{R})$?

Fin du problème

EXERCICE : UNE PROPRIÉTÉ DES MATRICES SYMÉTRIQUES

Notations et définition

- Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathbb{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices réelles colonnes de taille n que l'on munit de sa structure euclidienne standard où le produit de deux matrices colonnes X et Y est $X^\top Y$.
- On note $S_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n et symétriques.
- On note, pour tout entier naturel n non nul et pour toute matrice $A \in S_n(\mathbf{R})$,

$$R(A) = \{X^\top A X; X \in \mathbb{M}_n(\mathbf{R}) \text{ avec } X^\top X = 1\}.$$

- On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{R})$ est orthogonalement semblable à une matrice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbf{R})$ s'il existe une matrice $P \in O_n(\mathbf{R})$ (i.e. vérifiant l'égalité $P^\top P = I_n$) pour laquelle $B = P^\top A P$.

13. Soit $(A, B) \in S_n(\mathbf{R})^2$. On suppose que A est orthogonalement semblable à B . Prouver l'égalité : $R(A) = R(B)$.

14. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbf{R})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées dans l'ordre croissant, i.e. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

(a) Prouver l'inclusion : $R(A) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$.

(b) Établir l'égalité : $R(A) = [\lambda_1, \lambda_n]$.

(c) Montrer que si la matrice A est de trace nulle, alors 0 est élément de $R(A)$. Dans le cas où $n = 3$, la réciproque est-elle vraie ?

On appelle diagonale d'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la liste $(m_{1,1}, m_{2,2}, \dots, m_{n,n})$ de ses éléments diagonaux.

15. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'on dispose d'une matrice $P \in O_n(\mathbf{R})$ pour laquelle $P^\top A P$ a pour diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$ (où $\text{Tr } A$ désigne la trace de A). Vérifier que $\text{Tr } A$ est élément de $R(A)$.

16. (a) Donner un exemple de matrice $A \in S_2(\mathbf{R})$ dont la trace n'est pas élément de $R(A)$.

(b) Soit $A \in S_2(\mathbf{R})$. Montrer que $\text{Tr } A \in R(A)$ si et seulement si $0 \in R(A)$.

17. Soit $A \in S_2(\mathbf{R})$. On suppose que $\text{Tr } A \in R(A)$. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice dont la diagonale est $(\text{Tr } A, 0)$.

18. Soit n un entier avec $n \geq 2$.

On suppose que toute matrice $A \in S_n(\mathbf{R})$ telle que $\text{Tr } A \in R(A)$ est orthogonalement semblable à une matrice ayant pour diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$.

Soit $A \in S_{n+1}(\mathbf{R})$ telle que $\text{Tr } A \in R(A)$.

(a) Justifier l'existence d'une matrice colonne $C \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, d'une matrice ligne $L \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ et d'une matrice $B \in S_n(\mathbf{R})$ pour lesquelles la matrice A est orthogonalement semblable à la matrice par blocs $\begin{pmatrix} \text{Tr } A & L \\ C & B \end{pmatrix}$.

(b) Que vaut $\text{Tr } B$? En déduire que $\text{Tr } B \in R(B)$.

(c) Conclure que la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$.

19. Soit $A \in S_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe un réel a pour lequel la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à a .

Fin de l'exercice

Fin du sujet
