

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème :

On utilisera les notations suivantes :

- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites définies sur $\mathbf{N}$ à valeurs réelles ;
- E désigne le sous-ensemble de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergentes telles que

$$\exists N \in \mathbf{N}, \forall k \geq N, u_k \neq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

- à toute suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ appartenant à E et de limite égale à ℓ , on associe la suite $(u_n^c)_{n \in \mathbf{N}}$ définie à partir d'un certain rang par

$$u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right|$$

- E^c désigne l'ensemble des éléments $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de E telles que $(u_n^c)_{n \in \mathbf{N}}$ soit convergente ;
- soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite appartenant à E^c et soit ℓ^c la limite de $(u_n^c)_{n \in \mathbf{N}}$; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est :
 - lente si $\ell^c = 1$,
 - géométrique de rapport ℓ^c si $\ell^c \in]0, 1[$,
 - rapide si $\ell^c = 0$;
- soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite appartenant à E et de limite égale à ℓ , et soit r un réel strictement supérieur à 1 ; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vers ℓ est d'ordre r si la suite définie à partir d'un certain rang par $\frac{u_{n+1} - \ell}{|u_n - \ell|^r}$ est bornée ;
- on rappelle qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est stationnaire si $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.

Des résultats généraux

1. Montrer que l'ensemble E^c est non vide.
2. L'ensemble E^c est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$?
3. Montrer que E^c est strictement inclus dans E .
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un élément de E^c . Montrer que ℓ^c appartient au segment $[0, 1]$.

Exemples de calcul de vitesse de convergence

5. Soit k un entier strictement positif et q un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$. Montrer que les suites $\left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)_{n \in \mathbf{N}}$, $(n^k q^n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ appartiennent à E^c et donner leur vitesse de convergence.
6. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.
- (a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $v_n = e - \frac{e}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
- (b) Montrer que la suite (v_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.
7. Soit α un réel strictement supérieur à 1. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ . On note $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $S_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.
- (a) Montrer que $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
- (b) En déduire que $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle

8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre r , où r est un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est rapide.
9. (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est un élément de E . On note s la limite de cette suite.
- (b) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $\frac{1}{(n+1)!} \leq s - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$.
- (c) En déduire que la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est rapide.
- (d) Soit r un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vers s n'est pas d'ordre r .
10. On considère I un intervalle réel de longueur strictement positive, f une application définie sur I à valeurs dans I et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers un élément ℓ de I et que f est dérivable en ℓ .
- (a) Montrer que $f(\ell) = \ell$.

- (b) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas stationnaire alors elle appartient à E^c . Donner sa vitesse de convergence en fonction de $f'(\ell)$.
- (c) Montrer que si $|f'(\ell)| > 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est stationnaire.
- (d) Soit r un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur I et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas stationnaire. Montrer que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est d'ordre r si et seulement si $\forall k \in \{1, 2, \dots, r-1\}, f^{(k)}(\ell) = 0$.

Exercice 1 :

11. Question de cours : Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

12. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

(a) On pose pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $s_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p}$.

Vérifier que la suite $(s_p)_{p \in \mathbf{N}^*}$ est croissante et divergente.

- (b) Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait :

$$\sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} > 1.$$

On note alors $a_n = n + p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété et on pose : $u_n = \frac{a_n}{n}$.

On a donc $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} > 1$.

13. La suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est-elle convergente ?

14. Prouver pour $n \geq 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} < 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n-2} > 1.$$

15. Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ , alors $\ell \in [2, 3]$.

16. Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n : $1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}$.

17. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$1 - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n - 1} \leq 1.$$

18. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 :

Soit $\sum (-1)^n u_n$ une série alternée avec :

- i) $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n > 0,$
- ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$
- iii) la suite (u_n) converge en décroissant vers 0,
- iv) $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} - u_{n+1} \geq u_{n+1} - u_n.$

Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit : $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k.$

19. Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|R_n| + |R_{n+1}| = u_n.$

20. Vérifier que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad |R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p [u_{n+p} - u_{n+1+p}].$

En déduire la monotonie de la suite $(|R_n|)_{n \in \mathbf{N}}.$

21. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{u_n}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_{n-1}}{2}.$

22. En déduire qu'au voisinage de l'infini : $R_n \sim (-1)^n \frac{u_n}{2}.$

Fin de l'énoncé