

Exercice 1

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + n^2} + \sin(x)$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Soit $a > 0$. la suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[-a, a]$?
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}$?

Exercice 2

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1 + n^2 x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbf{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, +\infty[$.
3. Soit $a > 0$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a, +\infty[$.
4. Étude de la convergence de la suite (u_n) avec $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$?

Exercice 3

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2}$.

1. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbf{R}$?
2. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) .

Exercice 4

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{nx^2}{1+nx} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{n^2 x^3}{1+n^2 x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que la suite (f'_n) converge simplement sur $\mathbf{R}$ mais pas uniformément sur $[-1, 1]$.

Exercice 5

Soit, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : x \mapsto n \cos^n x \sin x$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt$. La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?
3. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout segment de $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 6

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln \left(e^x + \frac{x}{n} \right) dx$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x} dx$.