

Devoir à rendre le lundi 28 septembre 2026

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Partie 1 : Exemples

1. Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^{ix}}{p} \right)^n$ puis en déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right)$$

(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

2. Ecrire la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(\cos(x)) \cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique.
On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions.
3. Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que la série trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Partie 2 : Propriétés

Une condition suffisante

5. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

6. Soient a et b des réels quelconques.
Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a \cos(x) + b \sin(x)|$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.
7. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

8. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in C_{2\pi}$.
9. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx$ pour k et n entiers.
10. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x , $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$.

Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0 .

On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx = 0$.

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

11. Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x , on pose $u_0(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx)$.

On suppose ici que la série trigonométrique $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et l'on note g sa somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k(f) \cos(kx) + \beta_k(f) \sin(kx))$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

12. Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n , $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x , $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum (\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx))$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x , on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx))$$

13. Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$.
14. **Exemple.** Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.
Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ dont la somme est f .
15. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Déduire alors de la seconde somme la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

16. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?

Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

17. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \frac{n}{3^n} \cos(nx)$.

Fin de l'énoncé