

Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\beta > 0$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n(x) = n^\alpha x^\beta e^{-x\sqrt{n}}$ et l'on prolonge u_n par continuité en 0.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbf{R}^+$ de la série de fonctions $\sum u_n$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels α et β pour que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbf{R}^+$.
3. Déterminer une condition nécessaire sur α et β pour que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}^+$.

Exercice 2

Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+x)}$.

1. Montrer que f est définie, continue et décroissante sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
4. Exprimer $f(n)$ en fonction de H_n .

Exercice 3

Soit $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. La fonction f est-elle continue sur son ensemble de définition ?

Exercice 4

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{1}{n^2} \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)$.

1. Montrer que S est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.
4. Déterminer la limite de S en 0^+ puis en $+\infty$.
5. Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
6. Déterminer un équivalent de S en 0.

Exercice 5

Pour $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geq 2$, soit $f_n : x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la série de fonctions de terme général f_n .

On pose, pour $x \in D$, $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$.

2. Montrer qu'il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions sur D .
3. Si $n \geq 2$, soit $R_n : x \in D \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Montrer que : $\forall x \in D, |R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln n}$.
4. La fonction S est-elle continue sur D ?

Exercice 6

On définit la fonction f de la variable réelle x par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Donner l'ensemble de définition D de f et montrer que f est continue sur D .
2. Montrer que f est de classe C^1 sur D , puis donner sa dérivée.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Soit $x > 0$. Montrer que $1+2f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right)$, puis $\frac{1}{2^x} - 1 \leq 1+2f(x) \leq 0$.
Déterminer alors la limite de f en 0.
5. Montrer que $\forall x > 1, f(x) = \left(\frac{1}{2^{x-1}} - 1 \right) \zeta(x)$, où ζ est la fonction zêta de Riemann.

Exercice 7

Soit $F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de F .
2. Montrer que F est de classe C^∞ sur son domaine de définition.
3. Étudier la limite de F en $+\infty$.