

Un corrigé du D.M. n°01 : Extrait de CCINP MP 2017

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Partie 1 : Exemples

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx)$.

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x)| \leq \frac{|\cos(nx)|}{2^n} + \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$

On en déduit que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et en posant $\|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$ et $a_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$, on obtient

$$0 \leq \|f_n\|_{\infty} \leq a_n$$

Or les séries géométriques $\sum \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{3^n}$ convergent donc par linéarité la série $\sum a_n$ converge et par comparaison la série $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge.

On a ainsi obtenu la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum f_n$.

Pour tout entier $p \geq 2$, $\left| \frac{e^{ix}}{p} \right| = \frac{1}{p} < 1$ alors la série géométrique $\sum \left(\frac{e^{ix}}{p} \right)^n$ converge et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}}{p} \right)^n &= \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{p}} \\ &= \frac{p}{p - e^{ix}} \\ &= \frac{p}{p - \cos(x) - i \sin(x)} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}}{p} \right)^n &= p \times \frac{p - \cos(x) + i \sin(x)}{(p - \cos(x))^2 + \sin^2(x)} \end{aligned}$$

Finalement
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}}{p} \right)^n = p \times \frac{p - \cos(x) + i \sin(x)}{p^2 + 1 - 2p \cos(x)}.$$

Puisque $\cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx})$ et $\sin(nx) = \operatorname{Im}(e^{inx})$, et par convergence des séries géométriques, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2} \right)^n \right) + \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}}{3} \right)^n \right)$$

et d'après le résultat établi précédemment

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right) = 2 \times \frac{2 - \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} + \frac{3 \sin(x)}{10 - 6 \cos(x)}$$

2. On sait que $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, donc

$$\begin{aligned} \exp(e^{ix}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx) + i \sin(nx)}{n!} \\ \exp(e^{ix}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \cos(nx) + \frac{i}{n!} \sin(nx) \right) \end{aligned}$$

Et puisque $\left| \frac{\cos(nx)}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}$, $\left| \frac{\sin(nx)}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}$ et que la série exponentielle $\sum \frac{1}{n!}$ converge, par linéarité on a :

$$\exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cos(nx) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sin(nx)$$

Or $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x) + i \sin(x)) = \exp(\cos(x)) \times e^{i \sin(x)}$. Par unicité de la partie réelle d'un complexe on obtient :

$$\exp(\cos(x)) \cos(\sin(x)) = \operatorname{Re}(\exp(e^{ix})) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ posons $a_n = \frac{1}{n}$, on sait alors que (a_n) est de limite nulle.

Par déficonverge simplement sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum a_n \cos(nx)$ converge.

Or $a_n \cos(n \times 0) = a_n = \frac{1}{n}$ et la série $\sum \frac{1}{n}$ ne converge pas d'après les séries de Riemann.

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

4. On admet que la série trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin(nx)| \leq 1$ et $\sin\left(n \times \frac{\pi}{2n}\right) = 1$, alors

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas si $\alpha \leq 1$, donc la série $\sum \|f_n\|_\infty$ ne converge pas.

La série trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : Propriétés

Une condition suffisante

5. On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, notons cette hypothèse (H).

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x)| \leq |a_n \cos(nx)| + |b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$$

On en déduit que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ avec $0 \leq \|f_n\|_\infty \leq |a_n| + |b_n|$.

Par (H) et par linéarité la série $\sum (|a_n| + |b_n|)$ converge, donc par comparaison la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Ce qui donne la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

Une condition nécessaire

6. Soient a et b des réels quelconques.

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |a \cos(x) + b \sin(x)|$.

- Si $a = b = 0$ alors f est la fonction nulle et son maximum vaut bien $\sqrt{a^2 + b^2}$.
- Si a ou b ne sont pas nuls alors $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ et on peut écrire :

$$f(x) = \left| \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(x) \right) \right|$$

Notons $c = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $d = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, puisque $c^2 + d^2 = 1$ on sait qu'il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $c = \cos(\phi)$ et $d = \sin(\phi)$ (le point de coordonnées (c, d) est sur le cercle trigonométrique), donc on peut écrire

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} |\cos(\phi) \cos(x) + \sin(\phi) \sin(x)| = \sqrt{a^2 + b^2} |\cos(x - \phi)|$$

Or la fonction $x \mapsto |\cos(x - \phi)|$ est majorée par 1 et vaut 1 en $x = \phi$, alors son maximum vaut

1 et donc le maximum de $f : x \mapsto |a \cos(x) + b \sin(x)|$ vaut $\sqrt{a^2 + b^2}$.

7. On suppose que la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que la série $\sum \|f_n\|_\infty$, avec $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|$, converge.

Or d'après le résultat de la question précédente, $\|f_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, donc la série $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ converge.

On sait que : $0 \leq |a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $0 \leq |b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Puisque la série $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ converge, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0$, alors par encadrement on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |b_n|$.

Et par comparaison les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent.

Si la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.

alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

8. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Soit $f_n : x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue sur $\mathbb{R}$ par combinaison linéaire de fonctions continues,
- par hypothèse la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$,

et donc par théorème de continuité f , la somme de la série de fonctions $\sum f_n$, est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est 2π -périodique alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$$

Finalement $f \in C_{2\pi}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par parité de la fonction cosinus et formules trigonométriques, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx &= 2 \int_0^{\pi} \cos^2(nx) \, dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos(2nx)}{2} \, dx \\ &= \left[x + \frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_0^{\pi} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx &= \pi \end{aligned}$$

Si $k \neq 0$ alors $x \mapsto \sin(kx) \cos(nx)$ est impaire et donc $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx = 0$.

Si $k = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(kx) = 0$.

Finalement $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx = 0$

10. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x , $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$.

On admet que pour $k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) \, dx = 0$.

En reprenant les notations de la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \cos(nx) = \sum_{k=0}^{+\infty} (f_k(x) \cos(nx))$$

or $0 \leq |f_k(x) \cos(nx)| \leq |f_k(x)| \leq \|f_k\|_{\infty}$, donc la série de fonctions $\sum_k (f_k(x) \cos(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a déjà vu en question 8 que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique.

Et par convergence normale sur $\mathbb{R}$ donc uniforme de $\sum_k f_k(x) \cos(nx)$, on obtient par théorème d'intégration terme à terme sur le segment $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \cos(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \cos(nx) \, dx \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n(f) = \frac{a_n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx + \sum_{k=0, k \neq n}^{+\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx \right)$$

et par les résultats de la question 9 : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n(f) = a_n$

De même

$$\begin{aligned} \alpha_0(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \, dx \end{aligned}$$

$$\alpha_0(f) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \, dx \right)$$

et par parité des fonctions cosinus et sinus

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} 2a_k \int_0^{\pi} \cos(kx) \, dx$$

$$\alpha_0(f) = \frac{2a_0}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} 2a_k \int_0^{\pi} \cos(kx) \, dx$$

Or pour $k \neq 0 \quad \int_0^{\pi} \cos(kx) \, dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = 0$ donc finalement $\alpha_0(f) = 2a_0$

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

11. Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x , on pose $u_0(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx)$.

On suppose ici que la série trigonométrique $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et l'on note g sa somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k(f) \cos(kx) + \beta_k(f) \sin(kx))$$

Les résultats de la question précédente appliqués à la fonction g donnent directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n(g) = \alpha_n(f) \text{ et } \alpha_0(g) = 2 \times \frac{\alpha_0(f)}{2} = \alpha_0(f)$$

et avec ce qui a été admis $\beta_n(g) = \beta_n(f)$.

12. Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n , $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle.

Pour tout réel x , on pose $h(x) = g(x) - f(x)$. Par différence de deux fonctions continues et 2π -périodiques, $h \in C_{2\pi}$.

Par linéarité de l'intégrale sur $[-\pi, \pi]$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n(h) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x)) \cos(nx) dx = \alpha_n(g) - \alpha_n(f) = 0 \quad \text{et} \quad \beta_n(h) = \beta_n(g) - \beta_n(f) = 0$$

On en déduit que h est la fonction nulle et donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum (\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx))$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement que $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x , on a

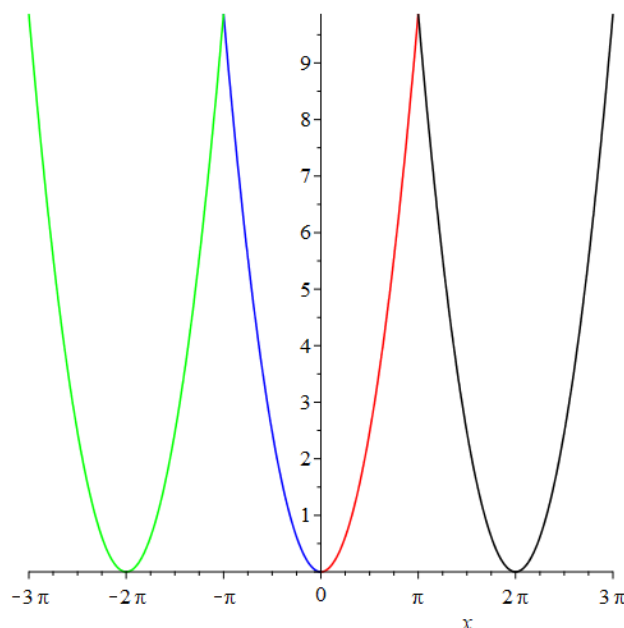
$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx))$$

13. Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, alors $\beta_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0$ puisque la fonction $x \mapsto f(x) \sin(nx)$ est impaire.

Et la fonction $x \mapsto f(x) \cos(nx)$ étant paire on a : $\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$.

14. **Exemple.** Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

On trace la courbe de f sur $[0, \pi]$, par parité on obtient la courbe sur $[-\pi, \pi]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis par les translations de vecteur $-2\pi\vec{i}$ et de vecteur $2\pi\vec{i}$, on obtient la courbe sur $[-3\pi, 3\pi]$ puisque f est 2π -périodique :



Par définition et par parité de la fonction f :

$$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_n(f) = 0$$

Par double intégration par parties avec $u_1(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, $v_1(x) = x^2$, $u_2(x) = \frac{\cos(nx)}{n}$, $v_2(x) = x$, ces fonctions étant de classe C^1 sur $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v_1(x) u_1'(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[x^2 \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2x \frac{\sin(nx)}{n} dx \\ &= \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi u_2'(x) v_2(x) dx \\ &= \frac{4}{n\pi} \left[x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi - \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n} dx \\ &= \frac{4(-1)^n \pi}{n^2 \pi} - \frac{4}{\pi n^2} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n(x) &= \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

On pose $u_0(x) = \frac{\alpha_0(x)}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n(x) = \alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx)$. On a vu que $\beta_n(f) = 0$ et $\alpha_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$, donc les séries $\sum \alpha_n(f)$ et $\sum \beta_n(f)$ convergent absolument et par le résultat de la question 7, la série trigonométrique $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors avec le résultat des questions 11 et 12, on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

15. Dans l'égalité précédente en prenant $x = 0$ et $x = \pi$ on obtient :

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{4 \times 3} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

1ère méthode : On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

en scindant la somme suivant les indices pairs et impairs on obtient

$$\begin{aligned}&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} \right) \\ \frac{\pi^2}{6} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} \right) \\ \frac{\pi^2}{6} &= \frac{\pi^2}{4 \times 6} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1}$

2nde méthode :

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et à termes positifs, donc elle converge absolument, alors par sommation par paquets on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ \frac{\pi^2}{6} &= \frac{\pi^2}{24} + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Et donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1}$

16. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le montre l'exemple de la question 14.

La fonction continue et 2π -périodique définie par $\forall x \in [-\pi, \pi] \quad f(x) = x^2$ n'est pas dérivable en π (voir sa courbe avec des demi-tangentes non identiques) :

- si $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ donc $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 2\pi$,
- si $x \in [\pi, 3\pi]$ $f(x) = f(x - 2\pi) = (x - 2\pi)^2$ donc $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = -2\pi \neq 2\pi$.

Mais f est somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Supposons que les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ convergent absolument.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq |a_n| \leq n|a_n|$ et $0 \leq |b_n| \leq n|b_n|$, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, alors par le résultat de la question 6, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc aussi simplement sur $\mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f'_n(x) = -na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)$.

Alors par le résultat de la question 6 on obtient aussi la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum f'_n$, donc sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Par théorème de dérivation terme à terme, on sait que la fonction f , somme de la série de fonctions $\sum f_n$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx))$$

Les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ convergent absolument est une condition suffisante pour que la somme de la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ soit définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

17. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \frac{n}{3^n}$, alors $\frac{|s_{n+1}|}{|s_n|} = \left| \frac{(n+1) \times 3^n}{3^{n+1} \times n} \right| = \frac{n+1}{3n} < 1$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|s_{n+1}|}{|s_n|} = \frac{1}{3} < 1. \text{ Par le critère de d'Alembert, la série } \sum s_n \text{ converge absolument.}$$

Par le résultat de la question précédente, on sait alors que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est

définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} \cos(nx)$.

Or en question 1 on a vu que $f(x) = \frac{3 \sin(x)}{10 - 6 \cos(x)}$, donc

$$f'(x) = 3 \times \frac{\cos(x)(10 - 6 \cos(x)) - \sin(x) \times 6 \sin(x)}{(10 - 6 \cos(x))^2} = 3 \times \frac{10 \cos(x) - 6}{(10 - 6 \cos(x))^2}$$

Finalement $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} \cos(nx) = \frac{3}{2} \times \frac{5 \cos(x) - 3}{(5 - 3 \cos(x))^2}$