

Exercice 1

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2}\lfloor x^2 \rfloor\right)$ est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ puis calculer $\int_0^2 f(x)dx$.

Exercice 2

Soient $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)(1+u^n)} du$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{(1+u^2)(1+u^n)} du$.

Montrer que I et J convergent, qu'elles sont égales et les calculer.

Exercice 3

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \arctan(x)}{(1+x^2)^2} dx$.

1. Montrer que I converge.
2. Rappeler la valeur de $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.
3. En déduire la valeur de I .

Exercice 4

1. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et f une fonction de classe C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx) dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
2. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
 - (a) Montrer que I est bien convergente.
 - (b) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = I$.
 - (c) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$.
 - (d) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ $J_{2p+1} = J_{2p-1}$. En déduire la valeur de I .

Exercice 5

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbf{N}^*$ l'intégrale I_n converge.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$.
3. En déduire I_n en fonction de n .

Exercice 6

Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et préciser $f'(x)$.
2. Montrer que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .
4. En déduire que f est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$, puis montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$.

Exercice 7

Soit f une fonction continue de $[1, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente.

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ converge pour tout réel strictement positif α .

Exercice 8

Pour $x \in \mathbf{R}^+$ on pose $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \ln\left(\frac{2+t^2}{1+t^2}\right) dt$.

1. Justifier l'existence et la continuité de f sur $\mathbf{R}^+$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et préciser la valeur de $f'(x)$.
3. f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 9

1. Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor dx$.
2. Calculer la valeur de I en admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 10

Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ puis étudier celle de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx$.

Exercice 11

Soit f continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ et $F(x) = \int_0^x f^2(t) dt$.

On suppose qu'il existe $L \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)F(x) = L$.

1. Montrer que $f(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$ et préciser cette limite.
2. Soit g une fonction continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$.
Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = \ell$.
3. Trouver un équivalent de $F(x)$ puis de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.