

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les résultats seront encadrés. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice n°1 : Une série de fonctions

Pour tout entier naturel n , on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur J .

On note alors pour tout x de J , $\varphi(x)$ sa somme.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J .
3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J .

4. Déterminer $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

5. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- 5.1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n . On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

- 5.2. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Exercice n°2 : Intégrales généralisées et recherche d'équivalents

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$, lorsque cela existe.

6. **Dans cette question, et uniquement cette question**, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right)$.

- 6.1. En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

- 6.2. En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

- 6.3. Donner alors un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers l'infini.
7. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.
8. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \int_a^x (\lambda - f(t)) dt$.
- 8.1. Justifier que H_λ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et préciser $H'_\lambda(x)$.
- 8.2. Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbf{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et que $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$.
9. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbf{R}$ et T -périodique ($T > 0$).
- 9.1. Démontrer que la fonction φ qui à tout réel x associe $\varphi(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt$ est constante.
?
Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \int_0^T f(t) dt$.
- 9.2. Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a + nT))_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.
- 9.3. Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbf{R}$.
- 9.4. Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ converge.
- 9.5. Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers l'infini.
10. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} dt$ et $B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t} dt$.
- 10.1. Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n .
- 10.2. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.
- 10.3. Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est bornée.
- 10.4. On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.
- i. Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question 9.
- ii. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3 : Série de fonctions et intégration

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right),$$

où $\forall t \in \mathbf{R}, \operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

11. Montrer que, pour tout x réel, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est croissante.
12. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente.
On pourra utiliser la suite $(\ln(P_n(x)))_{n \in \mathbf{N}^}$.*
13. Soit $x \in D$. On note $\varphi(x)$ la limite de la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$: $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$.
 - 13.1. Étudier la parité et la monotonie de la fonction φ sur D .
 - 13.2. Démontrer que la fonction φ est continue sur D .
14. *Existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(t)} dt$*
 - 14.1. Montrer l'existence et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt$.
 - 14.2. En déduire l'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(t)} dt$.

Fin de l'énoncé