

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les résultats seront encadrés. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice n°1 : Une série de fonctions

Pour tout entier naturel n , on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur J .

On note alors pour tout x de J , $\varphi(x)$ sa somme.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J .
3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J .

4. Déterminer $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

5. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- 5.1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n . On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

- 5.2. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Exercice n°2 : Intégrales généralisées et recherche d'équivalents

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$, lorsque cela existe.

6. **Dans cette question, et uniquement cette question**, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right)$.

- 6.1. En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

- 6.2. En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

- 6.3. Donner alors un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers l'infini.
7. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.
8. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \int_a^x (\lambda - f(t)) dt$.
- 8.1. Justifier que H_λ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et préciser $H'_\lambda(x)$.
- 8.2. Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbf{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et que $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$.
9. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbf{R}$ et T -périodique ($T > 0$).
- 9.1. Démontrer que la fonction φ qui à tout réel x associe $\varphi(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt$ est constante.
- Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \int_0^T f(t) dt$.
- 9.2. Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a + nT))_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.
- 9.3. Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbf{R}$.
- 9.4. Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ converge.
- 9.5. Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers l'infini.
10. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} dt$ et $B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t} dt$.
- 10.1. Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n .
- 10.2. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.
- 10.3. Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est bornée.
- 10.4. On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.
- i. Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question 9.
- ii. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Problème :

Rappels et notations

- Soient f et g deux fonctions de variable réelle et à valeurs réelles ne s'annulant pas au voisinage de $+\infty$. f est dite négligeable devant g en $+\infty$ si et seulement si le quotient $\frac{f}{g}$ tend vers 0 en $+\infty$, ce qui se traduit par : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0, \quad \forall x \geq A, \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$. On notera alors $f = o(g)$ en $+\infty$.
 f et g sont dites équivalentes en $+\infty$ si et seulement si $f - g = o(g)$ (ou $g - f = o(f)$) en $+\infty$.
 On notera alors $f \sim g$ en $+\infty$.
- Pour une série $\sum u_n$ de nombres réels, on note $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de ses sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Si de plus $\sum u_n$ est convergente, on note $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de ses restes :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

- $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Préliminaires

Soient $a \in \mathbf{R}$, f et g deux applications continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs strictement positives.

11. On suppose que g est intégrable sur $[a, +\infty[$.

11.1. Montrer qu'en $+\infty$, la relation $f = o(g)$ entraîne

$$\int_x^{+\infty} f = o\left(\int_x^{+\infty} g\right).$$

11.2. Montrer qu'en $+\infty$, la relation $f \sim g$ entraîne $\int_x^{+\infty} f \sim \int_x^{+\infty} g$
 (on justifiera l'intégrabilité de f sur les intervalles $[x, +\infty[$ considérés).

12. On suppose que g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

12.1. Montrer qu'en $+\infty$, la relation $f = o(g)$ entraîne

$$\int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right).$$

Montrer à l'aide d'exemples que l'on ne peut en général rien dire de l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

12.2. Montrer qu'en $+\infty$, la relation $f \sim g$ entraîne $\int_a^x f \sim \int_a^x g$.

Que dire de l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$?

Partie I

Soit a un nombre réel et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ à valeurs strictement positives.

On suppose que le quotient $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ tend vers une limite finie α en $+\infty$.

13. Montrer à l'aide des préliminaires que $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tend vers α quand x tend vers $+\infty$ (on pourra distinguer le cas $\alpha = 0$.)

14. On suppose dans cette question $\alpha < -1$.

14.1. Montrer que f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

14.2. Montrer qu'en $+\infty$ on a $\int_x^{+\infty} f \sim \frac{-xf(x)}{\alpha + 1}$
(on pourra considérer $\frac{xf(x)}{\alpha + 1}$ et utiliser les préliminaires.)

15. On suppose dans cette question $\alpha > -1$.

15.1. Étudier l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

15.2. Montrer qu'en $+\infty$ on a

$$\int_a^x f \sim \frac{xf(x)}{\alpha + 1}.$$

15.3. Donner un exemple d'application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ à valeurs strictement positives telle qu'en $+\infty$ le quotient $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tende vers une limite $\alpha > -1$, mais telle que l'on n'ait pas $\int_a^x f \sim \frac{xf(x)}{\alpha + 1}$.

16.

16.1. Étudier l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des applications $x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ selon $\beta \in \mathbf{R}$.

16.2. Étudier, à l'aide des questions précédentes, l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des applications $x \mapsto \frac{1}{x^\gamma(\ln(x))^\beta}$ selon $\beta \in \mathbf{R}$ et $\gamma \in \mathbf{R}$.

17. Que conclure quant à l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ dans le cas $\alpha = -1$?

Partie II

Dans cette partie, on considère une application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^+$, à valeurs strictement positives.

On suppose qu'en $+\infty$, $\frac{f'(x)}{f(x)}$ tend vers $\alpha \in \mathbf{R}$.

On considère la série de terme général $f(n)$. On note $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de ses sommes partielles et $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de ses restes quand la série converge.

On associe à f deux applications u et v continues par morceaux sur $\mathbf{R}^+$ et définies par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^* \text{ et pour tout } x \in [n-1, n[, \quad u(x) = f(n) \text{ et } v(x) = \int_{n-1}^n f(t)dt.$$

On pose enfin, pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $h(x) = e^{-\alpha x} f(x)$.

18. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer l'existence de $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $t \in [n-1, n]$, on ait :

$$|h(t) - h(n)| \leq (e^\varepsilon - 1)h(n).$$

(on pourra considérer $\frac{h'}{h}$).

19. On suppose dans cette question que α n'est pas nul. Dédurre de la question 18 que lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\int_{n-1}^n f(t)dt \sim \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n).$$

20. On suppose encore dans cette question que α n'est pas nul.

- 20.1. Exprimer pour $k \in \mathbf{N}^*$ les intégrales $\int_{k-1}^k v(t)dt$ et $\int_{k-1}^k u(t)dt$ à l'aide de f .

À l'aide des préliminaires, établir les résultats suivants :

- 20.2. Si f est intégrable sur $\mathbf{R}^+$, alors la série de terme général $f(n)$ converge et on a, quand n tend vers $+\infty$,

$$R_n \sim \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

- 20.3. Si f n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}^+$, alors la série de terme général $f(n)$ diverge et on a, quand n tend vers $+\infty$,

$$S_n \sim \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} \int_0^n f(t)dt.$$

21. On suppose à présent que $\alpha = 0$.

Montrer alors que la série de terme général $f(n)$ est convergente si et seulement si f est intégrable sur $\mathbf{R}^+$, avec $R_n \sim \int_n^{+\infty} f(t)dt$ en cas de convergence et $S_n \sim \int_0^n f(t)dt$ en cas de divergence.

22. À l'aide de ce qui précède, déterminer un équivalent simple des sommes suivantes quand n tend vers $+\infty$:

22.1. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k};$

22.2. $\sum_{k=1}^n \ln k;$

22.3. $\sum_{k=1}^n 2^k \ln k.$

Fin de l'énoncé