

Exercice n°1 : E3A PSI 2020

Pour tout entier naturel n , on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1. Soit $x \in J$. $f_n(x) = (-1)^n a_n(x)$ avec $a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+nx}} > 0$, de plus pour $x \in J$, $x > 0$ donc

$$n+1 > n \geq 1 \implies (n+1)x+1 > nx+1 > 0 \implies \sqrt{1+(n+1)x} > \sqrt{1+nx} > 0 \implies a_{n+1}(x) < a_n(x)$$

La suite $(a_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est décroissante, de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(x) = 0$, donc par le théorème spécial des séries alternées, on sait que la série $\sum f_n(x)$ converge.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement sur J .

On note alors pour tout x de J , $\varphi(x)$ sa somme.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in J$ $|f_n(x)| = a_n(x)$ or la fonction $a_n : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+nx}}$ est décroissante positive sur J alors f_n est bornée sur J avec

$$\|f_n\|_\infty^J = \sup_{x \in J} |f_n(x)| = a_n(1) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

On sait que $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ ne converge pas puisque $\frac{1}{2} \leq 1$, alors par comparaison la série à termes positifs $\sum \|f_n\|_\infty^J$ ne converge pas.

La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge donc pas normalement sur J .

Autre méthode : vu dans certaines copies même si ce fut mal utilisé

Si f_n n'est pas bornée sur J alors $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur J .

Si f_n est bornée sur J alors en notant $\|f_n\|_\infty^J = \sup_{x \in J} |f_n(x)|$, on a : $\forall x \in J$ $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty^J$,

et en particulier $|f_n(1)| \leq \|f_n\|_\infty^J$. Ce qui donne $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \|f_n\|_\infty^J$ or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ne converge pas (explication donnée précédemment). Par comparaison $\sum \|f_n\|_\infty^J$ ne converge pas.

Dans tous les cas $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur J .

3. Pour $x \in J$, la série $\sum f_n(x)$ converge et par le théorème spécial des séries alternées vérifié précédemment, on sait qu'en posant $R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$$

ce qui donne, par décroissance de $a_{n+1} : x \mapsto |f_{n+1}(x)|$ sur J :

$$\forall x \in J \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(1)|$$

La fonction R_n est donc bornée sur J avec $0 \leq \|R_n\|_\infty^J \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$.

Par théorème d'encadrement on obtient alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_\infty^J = 0$, ce qui signifie que

la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur J .

4. $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et $f_0 : x \mapsto 1$, de plus la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$, alors par théorème de la double limite on sait que

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$$

5. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5.1. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0 alors par le théorème spécial des séries alternées la série $\sum u_n$ converge.

On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

- 5.2. Montrons que $\varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} = O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ pour $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} \right) - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{nx} - \sqrt{1+nx}}{\sqrt{1+nx}\sqrt{nx}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{-1}{\sqrt{1+nx}\sqrt{nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx})} \right) \\ \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{1+nx}\sqrt{nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx})} \end{aligned}$$

$\forall x \in J \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad 1+nx \geq nx > 0$ alors

$$\sqrt{1+nx}\sqrt{nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx}) \geq \sqrt{nx}\sqrt{nx}(2\sqrt{nx}) > 0$$

et donc pour $x \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbf{N}^*$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1+nx}\sqrt{nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx})} \leq \frac{1}{2(n\sqrt{n})(x\sqrt{x})} \leq \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

$\frac{3}{2} > 1$ alors la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge et par comparaison $\sum \frac{1}{2(n\sqrt{n})(x\sqrt{x})}$ converge et $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{1+nx}\sqrt{nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx})}$ converge absolument, alors par inégalité triangulaire on peut écrire

$$\left| \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+nx}\sqrt{nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx})} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(n\sqrt{n})(x\sqrt{x})}$$

En notant $M = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n\sqrt{n}}$, on a $M > 0$ et

$$\forall x \in J \quad \left| \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{M}{x\sqrt{x}}$$

On a bien : $\varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$

Exercice n°2 : E3A PSI 2020

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$, lorsque cela existe.

6. Dans cette question, et uniquement cette question, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right)$.

6.1. $\frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{t} \times \frac{1}{1+1/t^2}$, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} = 0$, alors

$$\frac{t}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \right)$$

Or $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ pour u au voisinage de 0 alors

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et donc $\lambda - f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \lambda - 1 + \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On en déduit que

Si $\lambda \neq 1$ alors $\lambda - f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda - 1$.

Si $\lambda = 1$ alors $\lambda - f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2t^2}$.

6.2. La fonction $g : t \mapsto \frac{\lambda - f(t)}{t}$ est continue sur $[a, +\infty[$ puisque $a > 0$ et d'après ce qui précède :

- Si $\lambda \neq 1$ alors $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda - 1}{t}$ et l'intégrale $I(\lambda)$ n'existe pas puisque g est de signe constant au voisinage de $+\infty$ avec l'intégrale de Riemann $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ qui ne converge pas.
- Si $\lambda = 1$ alors $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2t^2} > 0$ et puisque $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ d'après les intégrales de Riemann ($2 > 1$), la fonction g est intégrable sur $[a, +\infty[$ et donc $I(\lambda)$ existe.

$I(\lambda)$ existe si et seulement si $\lambda = 1$.

6.3. On peut écrire pour $x > a$:

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{f(t)}{t} dt &= \int_a^x \frac{f(t) - 1}{t} dt + \int_a^x \frac{1}{t} dt \\ &= [\ln |t|]_a^x - \int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt \\ &= \ln(x) - \ln(a) - \int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt = I(1) \in \mathbf{R}$, on a :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = \ln(x) + o(\ln(x)) \text{ lorsque } x \text{ tend vers l'infini et donc } \int_a^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x).$$

7. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent, alors par linéarité, l'intégrale $I(\lambda) - I(\mu) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - \mu}{t} dt$ converge.

Puisque $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ ne converge pas, $\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - \mu}{t} dt$ converge si et seulement si $\lambda - \mu = 0$.

Si $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ convergent alors $\lambda = \mu$.

8. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \int_a^x (\lambda - f(t))dt$.

8.1. La fonction $g_\lambda : t \mapsto \lambda - f(t)$ est continue sur $\mathbf{R}$, alors H_λ est une primitive de g_λ , c'est celle qui s'annule en a .

On en déduit que H_λ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}, \quad H'_\lambda(x) = \lambda - f(x)$.

8.2. On suppose que H_λ est bornée sur $\mathbf{R}$.

On peut écrire $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t} \times H'_\lambda(t)dt$.

Les fonctions $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et H_λ sont de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, et puisque H_λ est bornée sur $\mathbf{R}$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$, on sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} H_\lambda(t)u(t) = 0$.

Par intégration pr parties on sait alors que l'intégrale $I(\lambda)$ est de même nature que l'intégrale $\int_a^{+\infty} u'(t)H_\lambda(t)dt$.

Or $u'(t) = \frac{-1}{t^2}$ et H_λ est bornée, donc il existe $M > 0 \quad \forall t \in [a, +\infty[\quad |u'(t)H_\lambda(t)| \leq \frac{M}{t^2}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ puisque $2 > 1$, alors par comparaison la fonction $t \mapsto u'(t)H_\lambda(t)$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ et donc l'intégrale $\int_a^{+\infty} u'(t)H_\lambda(t)dt$ converge.

Et on a alors :

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= [u(t)H_\lambda(t)]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(t)H_\lambda(t)dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)H_\lambda(t) - u(a)H_\lambda(a) + \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}dt \\ I(\lambda) &= \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}dt \end{aligned}$$

9. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbf{R}$ et T -périodique ($T > 0$).

9.1. Soit $\varphi : x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)dt$.

f est continue sur $\mathbf{R}$, en notant F une de ses primitives sur $\mathbf{R}$, on a

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \varphi(x) = F(x+T) - F(x)$$

donc φ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ avec, puisque f est T -périodique :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \varphi'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

On en déduit que φ est constante avec $\forall x \in \mathbf{R} \quad \varphi(x) = \varphi(0)$.

Soit x un réel :

$$\begin{aligned}
 H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) &= \int_a^{x+T} (\lambda - f(t))dt - \int_a^x (\lambda - f(t))dt \\
 &= \int_x^{x+T} (\lambda - f(t))dt \\
 &= \int_x^{x+T} \lambda dt - \varphi(x) \\
 &= \lambda T - \varphi(0)
 \end{aligned}$$

$$H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \int_0^T f(t)dt$$

9.2. Pour $\lambda \in \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R}$, en posant $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = H_\lambda(a + nT)$, le résultat de la question précédente avec $x = a + nT$ donne :

$$u_{n+1} - u_n = \lambda T - \int_0^T f(t)dt$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc arithmétique de raison $r = \lambda T - \int_0^T f(t)dt$, on sait alors que $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = u_0 + nr$, et donc $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est bornée si et seulement si $r = 0$.

La suite $(H_\lambda(a + nT))_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée, si, et seulement si, $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$.

9.3. On suppose que $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$, ainsi d'après 9.1., on a :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \int_0^T f(t)dt = 0.$$

La fonction H_λ est périodique.

Puisque H_λ est continue sur le segment $[0, T]$, H_λ est bornée sur ce segment :

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in [0, T] \quad |H_\lambda(x)| \leq M$$

Or $\forall y \in \mathbf{R}, \quad \exists p \in \mathbf{Z} \quad \exists x \in [0, T[\quad y = x + pT \quad (p = \left\lfloor \frac{y}{T} \right\rfloor)$, on en déduit que $H_\lambda(y) = H_\lambda(x + pT) = H_\lambda(x)$ et donc $\forall y \in \mathbf{R} \quad |H_\lambda(y)| \leq M$.

H_λ est donc périodique et bornée.

9.4. D'après la question 7, il existe au plus une valeur du réel λ pour laquelle $I(\lambda)$ converge.

Si $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$ alors la fonction H_λ est bornée et par le résultat de la question 8, $I(\lambda)$ converge.

On en déduit que $I(\lambda)$ converge si et seulement si $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$.

9.5. On suppose que $\lambda_0 \neq 0$. On sait alors que $I(\lambda_0)$ converge.

Comme en question 6.3, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{f(t)}{t} dt &= \int_a^x \frac{f(t) - \lambda_0}{t} dt + \lambda_0 \int_a^x \frac{1}{t} dt \\ &= \lambda_0 \ln(x) - \lambda_0 \ln(a) + \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $I(\lambda_0)$ converge, donc $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \lambda_0 \ln(x) + o(\ln(x))$.

On en déduit que $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln(x)$

10. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} dt$ et $B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t} dt$.

10.1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, de plus $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, donc $\frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} n$, la fonction $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ étant prolongeable par continuité en 0

l'intégrale A_n existe.

On admettra qu'il en est de même pour B_n .

10.2. $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} = \frac{\sin(t) - t}{t \sin(t)}$ et $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t - \frac{t^3}{6} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)$, alors $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-t^3/6}{t^2}$

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t}{6}$$

10.3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ par linéarité de l'intégrale

$$A_n - B_n = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(nt)| \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \right) dt$$

Puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et prolongeable par continuité en 0 (équivalent précédent), l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \right| dt$ converge, alors par comparaison et inégalité triangulaire :

$$|A_n - B_n| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(nt)| \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \right| dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \right| dt$$

La suite $(A_n - B_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est donc bornée.

10.4. On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.

i. Par le changement de variable affine $u = nt \iff t = \frac{u}{n}$, on a :

$$B_n = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u/n} \frac{1}{n} du = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du$$

La fonction $f : u \mapsto |\sin(u)|$ est π -périodique, alors en posant

$\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin(u)| du = \frac{2}{\pi} \neq 0$ on peut appliquer les résultats de la question 9, ce qui donne :

$$B_n \sim \lambda_0 \ln\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sim \frac{2}{\pi} \ln(n)$$

ii. $A_n = B_n + (A_n - B_n)$.

Puisque $(A_n - B_n)$ est bornée et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \ln(n) = +\infty$, on peut écrire : $A_n = B_n + o(B_n)$ et donc

$$A_n \sim B_n \sim \frac{2}{\pi} \ln(n)$$

Exercice 03 : E3A MP 2020

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right),$$

où $\forall t \in \mathbf{R}, \operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

11. On sait que $\forall t \in \mathbf{R} \quad \operatorname{ch}(t) \geq 1 > 0$.

Fixons x dans $\mathbf{R}$.

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad P_{n+1}(x) - P_n(x) = P_n(x) \times \left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right) - 1 \right) \geq 0$$

Pour tout x réel, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est croissante.

12. • On remarque que $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad P_n(0) = 1$, donc la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente pour $x = 0$.

• Fixons x dans $\mathbf{R}^*$.

On sait que $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad P_n(x) \geq 1 > 0$, donc $\ln(P_n(x))$ existe et $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right) > 0$, donc

$$\ln(P_n(x)) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right)\right)$$

On sait que $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ et $\ln(1 + u) = u + o(u)$ pour u au voisinage de 0, alors :

Pour k au voisinage de l'infini :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{e^{x/k} + e^{-x/k}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\text{et } \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \quad \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right)\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2k^2}$$

or la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente, alors par comparaison la série à termes positifs $\sum \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right)\right)$ est convergente.

On en déduit que la suite de ses sommes partielles $(\ln(P_n(x)))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente.

Il existe donc un réel $\alpha(x)$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(P_n(x)) = \alpha(x)$, et par continuité de la fonction exponentielle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = e^{\alpha(x)}$. La suite $(P_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est donc convergente.

Finalement l'ensemble J des réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente est

$$J = \mathbf{R}.$$

13. Soit $x \in J$. On note $\varphi(x)$ la limite de la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$.

(a) Par définition $\forall x \in \mathbf{R} \quad \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$.

La fonction ch est paire donc par produit les fonctions P_n sont aussi paires pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

On a donc $\forall x \in \mathbf{R} \quad P_n(-x) = P_n(x)$ et par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini, on obtient $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Par croissance de la fonction ch sur $\mathbf{R}^+$, par produit d'inégalités positives et par passage à la limite sur une inégalité on a :

$$0 \leq x < y \implies \forall k \in \mathbf{N}^* \quad 0 < \operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right) < \operatorname{ch}\left(\frac{y}{k}\right) \implies \forall n \in \mathbf{N}^* P_n(x) < P_n(y) \implies \varphi(x) \leq \varphi(y)$$

La fonction φ est donc croissante sur $\mathbf{R}^+$. Et puisque φ est paire, on sait que φ est décroissante sur $] -\infty, 0]$.

La fonction φ , définie sur $\mathbf{R}$, est paire, décroissante sur $\mathbf{R}^-$ et croissante sur $\mathbf{R}^+$.

(b) On a vu en question 11 que pour tout réel x , la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est croissante or elle est aussi strictement positive, donc $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) > 0$. On peut alors écrire

$$\varphi(x) = \exp(\ln(\varphi(x))).$$

Montrons que la fonction $x \mapsto \ln(\varphi(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{n}\right)\right)$ est continue sur $\mathbf{R}$:

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{n}\right)\right)$.

• $\forall n \in \mathbf{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbf{R}$ par composée.

• Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $a > 0$, f_n est paire et continue donc f_n est bornée sur $[-a, a]$ et $\|f_n\|_{\infty}^{[-a, a]} = \sup_{x \in [-a, a]} |f_n(x)| = \|f_n\|_{\infty}^{[0, a]}$.

La fonction ch est croissante sur $[0, a]$ et la fonction $\ln$ est croissante et positive sur $[1, +\infty[$, alors par composée la fonction f_n est croissante et positive sur $[0, a]$.

On en déduit que $\|f_n\|_{\infty}^{[-a, a]} = \|f_n\|_{\infty}^{[0, a]} = f_n(a)$. Or la série $\sum f_n(a)$ converge (vu en question 12), donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$, et donc aussi uniformément sur tout segment $[-a, a]$ avec $a > 0$.

Par théorème de continuité, la fonction $\ln \circ \varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbf{R}$.

Par composée avec la fonction exponentielle qui est continue sur $\mathbf{R}$,

on obtient la continuité sur $\mathbf{R}$ de la fonction φ .

14. (a) La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ est continue sur $\mathbf{R}$ puisque la fonction ch l'est et ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$.

La fonction g est paire, donc par le changement de variable affine $t = -x = \varphi(x)$, les intégrales $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ et $\int_{-\infty}^0 \varphi'(x) \times g \circ \varphi(x)dx$ sont de même nature et opposées en cas de convergence.

$$\forall t \in \mathbf{R}^+ \quad g(t) = \frac{2}{e^t + e^{-t}} \text{ et } e^{-t} > 0 \text{ donc } e^t + e^{-t} > e^t > 0 \text{ et}$$

$$0 \leq g(t) \leq 2e^{-t}$$

On sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge puisque $e^{-t} = e^{-\alpha t}$ avec $\alpha = 1 > 0$, par comparaison $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge et donc $\int_{-\infty}^0 \varphi'(x)g \circ \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^0 -g(x)dx$ converge aussi.

$$\text{Finalement } \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt \text{ converge et } \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \int_{-\infty}^0 g(t)dt + \int_0^{+\infty} g(t)dt = 2 \int_0^{+\infty} g(t)dt.$$

On pouvait aussi utiliser $e^t + e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^t$ donc $g(t) \sim 2e^{-t}$ avec $t \mapsto e^{-t}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ alors g est aussi intégrable sur $[0, +\infty[$ et par parité g est intégrable sur

$] -\infty, 0]$.

1ère méthode de calcul :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1 + (e^t)^2} dt = 2 [\arctan(e^t)]_0^{+\infty}$$

2nde méthode de calcul :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}'(t)}{1 + \operatorname{sh}^2(t)} dt = 2 [\arctan(\operatorname{sh}(t))]_0^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt = \pi$$

(b) On a vu en question 13.2 que la fonction φ est continue sur $\mathbf{R}$.

Pour $x \in \mathbf{R}$, on sait que la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est croissante donc :

$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad P_n(x) \geq P_1(x)$, et par passage à la limite quand n tend vers l'infini, on a :

$\forall x \in \mathbf{R} \quad \varphi(x) \geq \operatorname{ch}(x) > 0$, et donc

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad 0 < \frac{1}{\varphi(x)} \leq \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt$ converge alors par comparaison,

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(t)} dt$ converge aussi.