

Pour les exercices 1 et 2, voir le corrigé du sujet 1

Problème : A partir de Centrale PC 2003

Rappels et notations

- Soient f et g deux fonctions de variable réelle et à valeurs réelles ne s'annulant pas au voisinage de $+\infty$. f est dite négligeable devant g en $+\infty$ si et seulement si le quotient $\frac{f}{g}$ tend vers 0 en $+\infty$, ce qui se traduit par : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0, \quad \forall x \geq A, \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$. On notera alors $f = o(g)$ en $+\infty$.
 f et g sont dites équivalentes en $+\infty$ si et seulement si $f - g = o(g)$ (ou $g - f = o(f)$) en $+\infty$. On notera alors $f \sim g$ en $+\infty$.

- Pour une série $\sum u_n$ de nombres réels, on note $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de ses sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbf{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Si de plus $\sum u_n$ est convergente, on note $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de ses restes :

$$\forall n \in \mathbf{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

- $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Préliminaires

Soient $a \in \mathbf{R}$, f et g deux applications continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs strictement positives.

11. On suppose que g est intégrable sur $[a, +\infty[$.

11.1 On suppose qu'en $+\infty$, la relation $f = o(g)$ est vérifiée alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > a \quad \forall x > A, \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

or f et g sont positives donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > a \quad \forall t > A \quad 0 \leq f(t) \leq \varepsilon g(t)$$

Par comparaison f est alors intégrable sur $[a, +\infty[$ donc sur tout intervalle $[x, +\infty[$ et par propriétés de l'intégrale (positivité, croissance, linéarité), on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x > A \quad 0 \leq \int_x^{+\infty} f(t) dt \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} g(t) dt$$

Ce qui donne $f \underset{+\infty}{=} o(g)$ et g intégrable sur $[a, +\infty[\implies \int_x^{+\infty} f \underset{+\infty}{=} o \left(\int_x^{+\infty} g \right)$.

- 11.2 On suppose qu'en $+\infty$, la relation $f \sim g$ est vérifiée, puisque g est intégrable en $+\infty$, on sait que f est aussi intégrable en $+\infty$, donc sur $[x, +\infty[$ pour tout $x \geq a$.

f et g étant intégrables sur $[x, +\infty[$, $f - g$ est aussi intégrable sur $[x, +\infty[$, alors par linéarité et inégalité triangulaire :

$$\forall x > a \quad \left| \int_x^{+\infty} f(t)dt - \int_x^{+\infty} g(t)dt \right| \leq \int_x^{+\infty} |f(t) - g(t)|dt$$

Puisque $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$, on sait que $f - g = o(g)$ et puisque g est positive on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall t \geq A \quad |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon g(t)$$

Alors par intégration

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x > A \quad \int_x^{+\infty} |f(t) - g(t)|dt \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} g(t)dt$$

et finalement

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x > A \quad \left| \int_x^{+\infty} f(t)dt - \int_x^{+\infty} g(t)dt \right| \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} g(t)dt$$

On a bien obtenu $f \underset{+\infty}{\sim} g$ et g intégrable en $+\infty$ entraîne $\int_x^{+\infty} f \sim \int_x^{+\infty} g$.

12. On suppose que g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

- 12.1 $f = o(g)$ au voisinage de $+\infty$ et f et g sont positives.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A > a$ tel que $\forall t \in [A, +\infty[\quad 0 < f(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}g(t)$, alors par relation de Chasles et croissance de l'intégrale pour $x > A$:

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^A f(t)dt + \int_A^x f(t)dt \leq \int_a^A f(t)dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_A^x g(t)dt \leq \int_a^A f(t)dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_A^x g(t)dt$$

or g est positive donc $\int_A^x g(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$ et

$$\forall x > A, \quad 0 < \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^A f(t)dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x g(t)dt$$

g est strictement positive donc $\int_a^x g(t)dt > 0$, et on obtient :

$$\forall x > A \quad 0 < \frac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt} \leq \frac{\int_a^A f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Puisque la fonction g est continue par morceaux et strictement positive sur $[a, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ est strictement croissante, et puisque $\int_a^{+\infty} |g(t)|dt = \int_a^{+\infty} g(t)dt$ ne converge pas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x g(t)dt = +\infty$.

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^A f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt} = 0$, et il existe $B > 0$ tel que

$$\forall x > \max(A, B) \quad 0 < \frac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

On a montré :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall x > C, \quad \left| \frac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt} \right| \leq \varepsilon$$

Ce qui signifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt} = 0$ et donc

$$\int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right) \text{ lorsque } f = o(g) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

Si on prend $f_1 : t \mapsto \frac{1}{t^2}$, $f_2 : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$. D'après les intégrales de Riemann, f_1 est intégrable en $+\infty$, f_2 et g ne sont pas intégrables en $+\infty$ ($\frac{1}{2} < 1 < 2$), pourtant $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ au voisinage de $+\infty$.

On ne peut en général rien dire de l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

12.2 En $+\infty$, la relation $f \sim g$ équivaut à $f - g = o(g)$, ou encore à $|f - g| = o(g)$ et d'après le résultat de la question précédente $\int_a^x |f(t) - g(t)|dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$, or par inégalité triangulaire de l'intégrale sur un segment $\left|\int_a^x (f(t) - g(t))dt\right| \leq \int_a^x |f(t) - g(t)|dt$ donc $\int_a^x (f(t) - g(t))dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$ ce qui donne par linéarité de l'intégrale sur un segment

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x g(t)dt + o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

et donc si $f \sim g$ alors $\int_a^x f \sim \int_a^x g$ au voisinage de $+\infty$.

Avec l'équivalent précédent, on a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x g(t)dt = +\infty$ et donc la fonction positive f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

Partie I

Soit a un nombre réel strictement positif et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ à valeurs strictement positives. On suppose que le quotient $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ tend vers une limite finie α en $+\infty$.

13. 1er cas : $\alpha = 0$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha = 0$, on a $\frac{f'(x)}{f(x)} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$, mais on ne peut pas appliquer directement le préliminaire car on ne sait pas si la fonction $\frac{f'}{f}$ est positive.

En fait on a aussi $\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable en $+\infty$, alors par le préliminaire en posant $b = \max(a, 1)$, on sait que $\int_b^x \left|\frac{f'(t)}{f(t)}\right| dt = o\left(\int_b^x \frac{1}{t} dt\right)$, et par inégalité triangulaire on récupère $\int_b^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_b^x \frac{1}{t} dt\right)$ ce qui donne, puisque f est strictement positive, $\ln(f(x)) - \ln(f(b)) = o(\ln x - \ln b)$ ou encore, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, $\ln(f(x)) = o(\ln x)$. On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = 0 = \alpha$.

2ème cas : $\alpha \neq 0$

On a donc par hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{\alpha f(x)} = 1$, donc $\frac{f'(x)}{f(x)} \sim \frac{\alpha}{x}$. Au voisinage de $+\infty$ $\frac{f'(x)}{f(x)}$ et α sont donc de même signe.

Si $\alpha > 0$, puisque $x \mapsto \frac{\alpha}{x}$ est strictement positive et non intégrable en $+\infty$, par le préliminaire avec b suffisamment grand, on obtient $\int_b^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt \sim \alpha \int_b^x \frac{1}{t} dt$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(f(x)) - \ln(f(b))}{\alpha(\ln(x) - \ln(b))} \right) = 1, \text{ or toujours avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty, \text{ on obtient}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x)) - \ln(f(b))}{\alpha \ln(x)} = 1 \text{ puis finalement } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \alpha.$$

Si $\alpha < 0$ alors $-\frac{f'(x)}{f(x)} \sim -\frac{\alpha}{x}$ avec $-\alpha > 0$ et en reprenant le cas précédemment traité on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(f(x))}{\ln(x)} = -\alpha, \text{ ou encore } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \alpha.$$

Dans tous les cas $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tend vers α quand x tend vers $+\infty$

Le sujet est mal posé dans les préliminaires, il suffit en effet d'avoir comme hypothèse que g est strictement positive et pas du tout la fonction f parce qu'on peut utiliser l'inégalité

triangulaire sur les intégrales dès qu'il y a des fonctions intégrables. Cela aurait évité d'avoir à traiter différents cas suivant le signe de α ...

14. On suppose dans cette question $\alpha < -1$.

14.1 Par hypothèse f est continue sur $[a, +\infty[$ et strictement positive.

D'après le résultat de la question précédente, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \alpha$ donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 1 \quad \forall x > A \quad -\varepsilon \ln x \leq \ln(f(x)) - \alpha \ln(x) \leq \varepsilon \ln(x)$$

ce qui donne

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x > A \quad \ln(x^{-\varepsilon}) \leq \ln\left(\frac{f(x)}{x^\alpha}\right) \leq \ln(x^\varepsilon)$$

Et par passage à l'exponentielle qui est croissante sur $\mathbf{R}$ et multiplication par $x^\alpha > 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x > A \quad 0 < x^{\alpha-\varepsilon} \leq f(x) \leq x^{\alpha+\varepsilon}$$

Puisque $\alpha < -1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha < \alpha + \varepsilon < -1$ et donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^{\alpha+\varepsilon})$ avec

la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{-\alpha-\varepsilon}}$ qui est intégrable en $+\infty$ puisque $-(\alpha + \varepsilon) > 1$. Par comparaison la fonction f est intégrable en $+\infty$ et donc

f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

14.2 Soit $g : x \mapsto \frac{xf(x)}{\alpha + 1}$. La fonction g est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ avec $g'(x) = \frac{f(x) + xf'(x)}{\alpha + 1}$.

Par hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{f(x)} = 1$, donc $f(x) \sim g'(x)$ pour x au voisinage de $+\infty$.

Puisque f est intégrable sur $[a, +\infty[$ et strictement positive, pour x assez grand $g'(x)$ est strictement positif et d'après le préliminaire, $\int_x^{+\infty} f(t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g'(t)dt$.

Puisque $\alpha < -1$, on a vu précédemment qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha + \varepsilon < -1$ et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^{\alpha+\varepsilon})$, donc $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^{\alpha+\varepsilon+1})$ avec $\alpha + \varepsilon + 1 < 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et

finalement $\int_x^{+\infty} g'(t)dt = \left(\lim_{+\infty} g\right) - g(x) = -g(x)$, donc en $+\infty$ on a $\int_x^{+\infty} f \sim \frac{-xf(x)}{\alpha + 1}$

15. On suppose dans cette question $\alpha > -1$.

15.1 f est continue sur $[a, +\infty[$.

En reprenant ce qui a été fait dans la question 14.1 :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x > A \quad 0 < x^{\alpha-\varepsilon} \leq f(x)$$

$\alpha > -1$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha > \alpha - \varepsilon > -1$ et $x^{\alpha-\varepsilon} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(f(x))$. Puisque

$x^{\alpha-\varepsilon} = \frac{1}{x^{-\alpha+\varepsilon}}$ avec $-\alpha + \varepsilon < 1$, la fonction $x \mapsto x^{\alpha-\varepsilon}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ et par

comparaison f non plus. f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

15.2 Comme en question 14.2, on a $g'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f(x)$ avec $g : x \mapsto \frac{xf(x)}{\alpha + 1}$ de classe C^1 sur $[a, +\infty[$.

Puisque f est strictement positive, il existe $b > 0$ tel que $\forall x > b \quad g'(x) > 0$ et en utilisant le préliminaire $\int_b^x f(t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_b^x g'(t)dt$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_b^x f(t)dt = +\infty$ (f positive non intégrable en $+\infty$), on a :

$\int_a^b f(t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_b^x f(t)dt\right)$, donc $\int_a^x f(t)dt \sim \int_b^x f(t)dt$, de même avec g' et finalement

$$\int_a^x f(t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^x g'(t)dt$$

ce qui donne

$$\int_a^x f(t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x) - g(a)$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - g(a))$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et donc

$g(x) - g(a) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$. On a bien : $\int_a^x f \sim \frac{xf(x)}{\alpha + 1}$ au voisinage de $+\infty$.

15.3 Soit $f : x \mapsto 2 + \cos(x)$, f est de classe C^1 , strictement positive et bornée sur $[0, +\infty[$, alors par composée $x \mapsto \ln(f(x))$ est aussi bornée sur $[0, +\infty[$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \alpha \text{ avec } \alpha = 0 > -1.$$

On suppose : $\int_0^x f(t)dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{\alpha + 1}$, on aura alors $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \underset{+\infty}{\sim} f(x)$.

Or $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = 2 + \frac{\sin(x)}{x}$, donc $2 + \frac{\sin(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} 2 + \cos(x)$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\sin(x)}{x}\right) = 2$ on doit aussi avoir $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \sin(x)) = 2$, ce qui est absurde puisque la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

$f : x \mapsto 2 + \cos(x)$ est de classe C^1 , strictement positive et vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \alpha$ avec $\alpha = 0 > -1$ mais $\int_0^x f(t)dt$ n'est pas équivalent à $\frac{xf(x)}{\alpha + 1}$.

16.

16.1 Soit $\beta \in \mathbf{R}$, $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta(x)}$ est continue et strictement positive sur $[2, +\infty[$.

• Si $\beta \neq 1$ alors

$$\int_2^x f(t)dt = \left[\frac{\ln^{-\beta+1}(t)}{1-\beta} \right]_2^x = \frac{1}{1-\beta} (\ln^{1-\beta}(x) - \ln^{1-\beta}(2))$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f(t) dt = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ \frac{\ln^{1-\beta}(2)}{\beta-1} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}.$

- Si $\beta = 1$ alors $\int_2^x f(t) dt = [\ln |\ln(t)|]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2))$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f(t) dt = +\infty.$

Finalement $x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta(x)}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\beta > 1$.

16.2 Soit $\gamma \in \mathbf{R}$ et $\beta \in \mathbf{R}$ avec $\gamma \neq 1$ (pour $\gamma = 1$ on revient dans le cas de la question précédente).

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\gamma (\ln(x))^\beta}$ est de classe C^1 , strictement positive sur $[2, +\infty[$ avec

$$\forall x \geq 2 \quad f'(x) = -\frac{\gamma x^{\gamma-1} \ln^\beta(x) + \beta x^{\gamma-1} \ln^{\beta-1}(x)}{x^{2\gamma} \ln^{2\beta}(x)}$$

donc $\frac{xf'(x)}{f(x)} = -\left(\gamma + \frac{\beta}{\ln(x)}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = -\gamma$. D'après les questions 14.1 et 15.1, si $\gamma > 1$ alors f est intégrable sur $[2, +\infty[$ et si $\gamma < 1$ alors f n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$.

$x \mapsto \frac{1}{x^\gamma \ln^\beta(x)}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\gamma > 1$ ou ($\gamma = 1$ avec $\beta > 1$).

17. On vient de voir en question 16.1 que :

- la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{\ln(x)+1}{x^2 \ln^2(x)}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = -1$,
- la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^2(x)}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{\ln(x)+2}{x^2 \ln^3(x)}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = -1$.

Dans le cas où $\alpha = -1$ on ne peut rien dire sur l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

Personne n'est vraiment allé plus loin, ce qui est plutôt normal vu la longueur du sujet.