

Partie I : Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Q 1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2 + 1} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Q 2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

Q 3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

Q 4. Montrer que g est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q 5. à l'aide d'un changement de variable affine, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2g'(x)g(x).$$

Q 6. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2.$$

Q 7. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, puis conclure que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie II : Une transformée de Fourier

Dans cette partie on désigne par h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Q 8. Montrer que h est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$.

Q 9. En déduire que la fonction $\hat{h} : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-ixt} dt$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Première méthode de calcul de $\hat{h}$:

On définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions g_n par :

$$g_n(t) = t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Q 10. Montrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, la fonction g_n appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Q 11. Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .

Q 12. En déduire une expression simple de $\frac{I_n}{(2n)!}$.

Q 13. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ la série de terme général $(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ converge et déterminer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$.

Q 14. Vérifier que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(xt)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q 15. Justifier avec soin l'égalité :

$$\hat{h}(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Q 16. Dédire de ce qui précède une expression simple de $\hat{h}(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Seconde méthode de calcul de $\hat{h}$:

Q 17. Montrer que $\hat{h}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\hat{h}'(x)$ peut s'obtenir par dérivation sous le signe d'intégration.

Q 18. En déduire que $\hat{h}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on notera (E) .

Q 19. Déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) , expliciter alors $\hat{h}(x)$ et retrouver ainsi le résultat obtenu à la question **Q 16**.

Q 20. Dédire de la question **Q 16** (ou **Q 19**) qu'il existe un nombre réel λ que l'on explicitera tel que :

$$\hat{h} = \lambda h$$