

Exercice 1

Pour $n \in \mathbf{N}$, considérons $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nx}}{(1+2e^x)^{n+1}} dx$.

1. Justifier la convergence de l'intégrale définissant I_n .
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
3. Montrer que : $\forall n \geq 2 \quad I_n = \frac{1}{2n3^n} + \frac{n-1}{2n} I_{n-1}$.
4. Déterminer une expression de $n2^n I_n$ en fonction de n .
5. En déduire un équivalent simple de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^n} dx$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est bien définie pour $n \in \mathbf{N}^*$ et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.
2. (a) En posant $x = \frac{1}{u}$, montrer que $I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{u^4+1} du$.
 (b) En posant $v = u - \frac{1}{u}$, calculer I_1 .
On pourra calculer v^2 .
3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer une expression explicite de I_n .

Exercice 3

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)} dt$.

1. Montrer que l'intégrale I est bien définie.
2. Montrer que l'on peut écrire $\frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)} = 2e^{-t} \sin(t) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt}$ pour $t \in]0, +\infty[$.
3. En déduire que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}$.
4. Justifier que $I < \frac{7}{4}$.
5. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} dx$, en déduire que $\frac{\pi}{4} < I$.

Exercice 4

Soit $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est continue sur I .
3. En considérant $g(x) = xf(x)$, déterminer un équivalent de f aux bords de I .

Exercice 5

On note $f : x \mapsto \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos(t) + 1) dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa continuité.

2. On rappelle que $\forall x \in]-1, 1[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Déterminer une expression de $f(x)$ sans intégrale.

Exercice 6

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\text{sh}(t)}{t} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Montrer que f est de classe C^1 sur son domaine de définition et préciser la valeur de $f'(x)$.

3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 7

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Justifier que $\forall u \in \mathbf{R} \quad |\arctan(u)| \leq |u|$.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

3. Pour $x^2 \neq 1$, déterminer $A(x)$ et $B(x)$ tels que :

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad \frac{1}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = \frac{A(x)}{1+t^2} + \frac{B(x)}{1+t^2x^2}$$

4. Montrer que $\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$. En déduire $f(x)$ pour $x > 0$.

5. Déterminer $f(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.