Exercice 1

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, déterminer AE_{pq} et $E_{pq}A$.
2. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
3. Déterminer l'ensemble des matrices de $GL_n(\mathbf{C})$ qui commutent avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbf{C})$.
   On pourra considérer les matrices $I_n + E_{ij}$.

Exercice 2

Montrer que f, défini sur $\mathbf{R}_n[X]$ par $\forall x \in \mathbf{R} \quad f(P)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\mathrm{d}t$, est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. Donner sa trace.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on cherche à déterminer $\Delta_A = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad M + M^T = tr(M)A\right\}$. On note S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et A_n celui des matrices antisymétriques.

1. Montrer que Δ_A est un espace vectoriel.
2. Si $tr(A) \neq 2$, montrer que $\Delta_A = \mathrm{A}_n$.
3. Déterminer Δ_A si $tr(A) = 2$ et $A \notin \mathrm{S}_n$.
4. Si $A \in \mathrm{S}_n$ et $tr(A) = 2$, déterminer $\Delta_A \cap \mathrm{S}_n$ et en déduire Δ_A.

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \quad tr(M) = 0 \Longrightarrow tr(AM) = 0$.
Montrer que A est une matrice scalaire (i.e $\exists \lambda \in \mathbf{C}, \quad A = \lambda I_n$).

Exercice 5

Déterminetr toutes les formes linéaires φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour toutes matrices A et B.

Exercice 6

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1. Montrer que A commute avec D si et seulement si A est diagonale.
2. Montrer que A commute avec D si et seulement si A est un polynôme en D.

Exercice 7

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur e_1 de E tel que $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), u^2(e_1))$ soit une base de E.
2. On note $C(u)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u, c'est-à-dire $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), \quad u \circ v = v \circ u\}$, appelé le commutant de u.
   (a) Montrer que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, et que $C(u)$ est stable par la loi $\circ$.

(b) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$; Montrer que $v \in C(u)$ si et seulement si il existe $P \in \mathbf{K}_2[X]$ tel que $v = P(u)$.

(c) Déterminer la dimension de $C(u)$.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
3. Déterminer A^k pour $k \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 9

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbf{K}^3$ tel que X^2 soit un polynôme annulateur de u.

1. Comparer le noyau et l'image de u, puis calculer leur dimension.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{K}^3$ telle que $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant $P(-1) = 1, \quad P(0) = 2, \quad P(1) = 3$.

Exercice 11

Soit $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_n$ et $2n+2$ nombres complexes $y_0, \ldots, y_n, y'_0, \ldots, y'_n$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $H \in \mathbf{C}_{2n+1}[X]$ vérifiant

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad H(x_k) = y_k \text{ et } H'(x_k) = y'_k$$

Exercice 12

Soient $f_1, \ldots, f_k$ des endomorphismes non nuls d'un espace vectoriel E tels que $\sum_{i=1}^{k} f_i = Id_E$ et $f_i \circ f_j = 0$ si $i \neq j$.

1. Montrer que $\forall i \in [\![1, k]\!] \quad f_i$ est un projecteur.
2. Montrer que $E = Im(f_1) \oplus \cdots \oplus Im(f_k)$.
3. Soit $f = a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k$.
   (a) Calculer f^p.
   (b) Montrer que $(f_1, \ldots, f_k)$ est libre et que $(Id_E, f, \ldots, f^k)$ est liée.
   (c) Montrer que $(Id_E, f, \ldots, f^{k-1})$ est libre si et seulement si les scalaires a_i sont deux à deux distincts.

Exercice 13

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts ($n \geqslant 2$) et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$
$E_i = Ker(u - \lambda_i Id_E)$.
Montrer que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

Exercice 14

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ la matrice définie par $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ O & A \end{pmatrix}$. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$.
A l'aide de P et P', exprimer $P(B)$ sous la forme d'une matrice écrite par blocs.

Exercice 15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ O_n & 3A \end{pmatrix}$.

1. Expliciter une base de $Ker(B)$ en fonction d'une base de $Ker(A)$.
   En déduire que $rg(B) = 2rg(A)$.
2. Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ inversible. On note $H = \begin{pmatrix} Q & Q \\ O_n & Q \end{pmatrix}$. Calculer $H^{-1}.B.H$ et en déduire que B est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & 3A \end{pmatrix}$.