Exercice n°1 : Matrices de rang 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n, $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réells d'ordre n et $\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre n.

A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rang égal à 1.

1. On note $C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$ la première colonne non nulle de A. Démontrer qu'il existe une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbf{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.

2. Calculer le réel $L \times C$ et en déduire que $A^2 = Tr(A).A$, où $Tr(A)$ désigne la trace de la matrice A.

On note désormais u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A. On note $Ker(u)$ le noyau de u et $Im(u)$ l'image de u.

3. On suppose que $Im(u) \cap Ker(u) \neq \{0_{\mathbf{R}^n}\}$.
   Justifier que $Im(u) \subset Ker(u)$, puis qu'il existe une base de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$.

4. On suppose que $Im(u) \cap Ker(u) = \{0_{\mathbf{R}^n}\}$.
   Démontrer qu'il existe une base de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel non nul.

5. Conclure que dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

Exercice n°2 : Endomorphismes de carré nul

Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathbf{K}^n$ avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note $Ker(u)$ le noyau de u et $Im(u)$ l'image de u.

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

1. **Question de cours :** Montrer que si u et v sont deux endomorphismes qui commutent alors $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont stables par v.

2. Démontrer que $Im(u)$ est inclus dans $Ker(u)$.

3. Quelle inégalité obtient-on sur le rang de u ? On citera précisément le théorème utilisé.

4. On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbf{K}^2$ et on suppose ici que u est non nul.
   (a) Démontrer qu'il existe une droite D dans E telle que $Ker(u) = Im(u) = D$.

   (b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.
      i. Démontrer que $v(D) \subset D$.
      ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.

   (c) Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$, $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$.
   Démontrer que $v \circ w = 0$.

5. On revient au cas général. Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient $u_1, \ldots, u_m$ des endomorphismes de E tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2 \quad u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$$

   On pose $F_1 = Im(u_1)$ et pour tout $i \in [\![2,m]\!]$ $\quad F_i = Im(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.
   (a) Démontrer que, pour tout i compris entre 1 et $m-1$, F_i est un sous-espace vectoriel stable par u_{i+1}.

   (b) En déduire que, pour tout i compris entre 1 et m, F_i est de dimension au plus $\dfrac{n}{2^i}$.

   (c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que : $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_m$ est l'endomorphisme nul.

Fin de l'énoncé