Partie I Extrait de Centrale PSI 2023

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q 1. La fonction $v : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et par croissances comparées $v(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or on sait que $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ puisque $2 > 1$, donc par comparaison v est aussi intégrable en $+\infty$.

Finalement v est intégrable sur $[0,+\infty[$. $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est donc absolument convergente.}}$

On étudie les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Q 2. • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ existe, donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

• Pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle f(-x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)(-x)^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = f(x)$, donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

• $\displaystyle f(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. On a donc $\boxed{f(0) = \dfrac{\pi}{4}.}$

Q 3. Posons $u : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$ d'après ce qui précède.

• Pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto u(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-2x(1+t^2)e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2} = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$.

• Soit $a > 0$, alors $[-a,a] \subset \mathbb{R}$.

$$\forall x \in [-a,a] \quad \forall t \in [0,1] \quad -(t^2+1)x^2 \leqslant 0 \text{ donc } \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = 2|x|e^{-(1+t^2)x^2} \leqslant 2|x| \leqslant 2a$$

La fonction $\varphi : t \mapsto 2a$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc est intégrable sur ce segment et vérifie $\forall (x;t) \in [-a,a] \times [0,1]$ $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.

Par théorème de dérivation sous le signe $\int$, on sait que $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ avec, d'après la formule de

Leibniz : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -2\int_0^1 x e^{-(1+t^2)x^2}\,\mathrm{d}t}$

Q 4. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction g est sa primitive qui s'annule en 0, alors g est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q 5. *Rédaction pour ne pas faire qapparaître $\frac{1}{x}$ et ainsi éviter de faire deux cas : $x \in \mathbb{R}^*$ et $x = 0$:*

D'après le résultat de la question 3, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\int_0^1 x e^{-x^2-t^2x^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2e^{-x^2}\int_0^1 x e^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t \\ f'(x) &= -2e^{-x^2}\int_0^1 \varphi'(t)e^{-\varphi^2(t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{avec } \varphi(t) = tx \end{aligned}$$

Alors par le changement de variable $u = \varphi(t) = tx$, φ étant de classe C^1 sur $[0,1]$, on sait que

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{-x^2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\ f'(x) &= -2e^{-x^2}g(x) \end{aligned}$$

Or par définition de g (primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0), on sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = e^{-x^2}$ donc

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -2g'(x)g(x).}$

Q 6. Les fonctions f et g étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, l'égalité précédente entraine :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x -2g'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -\left[g^2(t)\right]_0^x = g^2(0) - g^2(x)$$

Or $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ et $g(0) = 0$ donc finalement

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{\pi}{4} - g(x)^2.}$

Q 7. On reprend la fonction u définie dans la question Q 3.

• Pour $t \in [0,1]$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t) = 0$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x,t)$ et $t \mapsto 0$ sont continues par morceaux sur le segment $[0,1]$.

• $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0,1] \quad |u(x,t)| = \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.

Or la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc est intégrable sur $[0,1]$.

Par théorème de convergence dominée à paramètre continu, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 u(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{x\to+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t$,

ce qui donne : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• Par passage à la limite sur l'égalité $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - g^2(x)$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g^2(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Or pour $x > 0$, $g(x) > 0$ puisque la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\forall x > 0 \quad g(x) = \sqrt{g^2(x)}$ et par continuité de la fonction racine carrée sur R^+, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

Ce qui revient à écrire $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Partie II Extrait de CCINP PSI 1997

Dans cette partie on désigne par h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Q 8. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, de plus elle est paire donc par le changement de variable affine $u = -t$, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} h(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

D'après le résultat de la question **Q 1**, on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, alors par le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{\sqrt{2}} = \varphi(u)$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(u)e^{-\varphi^2(u)}\,\mathrm{d}u$ converge avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \varphi'(u)e^{-\varphi^2(u)}\,\mathrm{d}u$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(u)e^{-\varphi^2(u)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u$. On en déduit que les intégrables $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} h(u)\,\mathrm{d}u$ convergent (et sont égales) donc par définition l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u$ converge.

Or h est positive donc $\boxed{h \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$ avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} h(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

et en utilisant le résultat de la question **Q 7**, on obtient : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}}$

Q 9. La fonction $t \mapsto h(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x, par produit de fonctions continues. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad |h(t)e^{-ixt}| = |h(t)| = h(t)$$

et on a montré précédemment que h est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$ converge absolument,

et donc $\boxed{\hat{h} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

Première méthode de calcul de $\hat{h}$:

On définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions g_n par :

$$g_n(t) = t^{2n}e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Q 10. Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, la fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions continues. On remarque que g_n est paire, donc g_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, elle est intégrable sur $[0,+\infty[$ par changement de variable $u=-t$ comme fait avec h en question **Q8**.

De plus par croissances comparées $g_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ $(2>1)$ alors par comparaison g_n aussi et finalement g_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc sur $]-\infty,0]$.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}).}$

On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Q 11. Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n+2}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{2n+1}\times te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

Les fonctions $u : t \mapsto t^{2n+1}$ et $v : t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et par croissances comparées $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, alors par intégration par parties puisque I_{n+1} converge on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 - u(0)v(0) + (2n+1)\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\
I_{n+1} &= (2n+1)I_n
\end{aligned}$$

Q 12. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{I_n}{(2n)!}$. L'égalité $I_{n+1} = (2n+1)I_n$ donne :

$$a_{n+1} = \frac{I_{n+1}}{(2n+2)!} = \frac{1}{2n+2}\times\frac{I_n}{(2n)!} = \frac{1}{2(n+1)}a_n$$

1ère méthode : avec une conjecture et une récurrence

On a donc $a_1 = \dfrac{1}{2\times1}a_0$, $a_2 = \dfrac{1}{2\times2}.a_1 = \dfrac{1}{2\times2}.\dfrac{1}{2\times1}a_0 = \dfrac{1}{2^2\times2!}a_0$.
Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \dfrac{a_0}{2^n n!}$:

- Pour $n=0$, on a $2^n n! = 1\times1 = 1$ donc l'égalité $a_n = \dfrac{a_0}{2^n n!}$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = \dfrac{a_0}{2^n n!}$. On a alors

$$a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)}a_n = \frac{a_0}{2(n+1)\times 2^n.n!} = \frac{a_0}{2^{n+1}(n+1)\times n!} = \frac{a_0}{2^{n+1}(n+1)!}$$

On a donc montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \dfrac{a_0}{2^n n!}$.

2nde méthode : sans récurrence $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\forall t>0 \quad g_n(t)>0$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n \neq 0$, donc

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \neq 0$, on en déduit que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2(n+1)}$, et alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} i} = \frac{1}{2^n \times n!}$$

Par le résultat de la question **Q 8**, on a : $a_0 = I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{I_n}{(2n)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n n! \sqrt{2}}.}$$

Q 13. Pour $x \in \mathbb{R}$, $(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2^n n!} = \dfrac{z^n}{n!}$ avec $z = -\dfrac{x^2}{2}$, or on sait que $\forall z \in \mathbb{C} \quad \sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$, donc

$$\boxed{\text{la série } \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).}$$

Q 14. Pour tout complexe z, on sait que $0 \leqslant |Re(z)| \leqslant |z|$.

En question **Q9.** on a montré que pour tout réel x la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors par domination la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(xt)$, qui est sa partie réelle, est intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(xt) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

Q 15. Soit x dans $\mathbb{R}$.
La fonction $t \mapsto h(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors sa partie imaginaire $t \mapsto -h(t)\sin(xt)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ ($\forall z \in \mathbb{C} \quad 0 \leqslant |Im(z)| \leqslant |z|$).
De plus la fonction $t \mapsto h(t)\sin(xt)$ est impaire alors par le changement de variable affine $t = -u$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} h(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} h(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{+\infty} h(u)\sin(xu)\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} h(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t \\
\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t &= 0
\end{aligned}$$

Il vient alors $\hat{h}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ et, par parité de $t \mapsto h(t)\cos(xt)$, $\hat{h}(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

Pour les 5/2 qui ont des connaissances que tout le monde aura plus tard dans l'année

Par développement en série entière on sait que $\forall u \in \mathbb{R} \quad \cos(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!}$

Ce qui me semble le plus facile actuellement pour un 3/2

D'après la formule d'Euler $\cos(xt) = \dfrac{1}{2}\left(e^{ixt} + e^{-ixt}\right)$, or $\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, alors par linéarité :

$$\cos(xt) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ixt)^n + (-ixt)^n}{n!}$$

Or pour n impair : $(-ixt)^n = (-1)^n(ixt)^n = -(ixt)^n$ et pour n pair il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et $(-ixt)^n = (ixt)^{2k} = (i^2)^k(xt)^{2k} = (-1)^k(xt)^{2k}$, donc il vient :

$$\cos(xt) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}t^{2k}}{(2k)!}$$

Autre méthode, trop longue, mais vue dans au moins deux copies mais mal exploitée :

La fonction cosinus est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle est aussi bornée sur $\mathbb{R}$ ainsi que toutes ses dérivées avec $\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad |\cos^{(p)} u| \leqslant 1$, alors par inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad 0 \leqslant \left|\cos(u) - \sum_{k=0}^{2n}\frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}u^k\right| \leqslant \underset{u\in\mathbb{R}}{Sup}|\cos^{(2n+1)}(u)| \times \frac{|u|^{2n+1}}{(2n+1)!} \leqslant \frac{|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Or par croissances comparées $\forall u \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|u|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$, alors par encadrement

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{2n}\dfrac{\cos^{(k)}(0)}{k!}u^k = \cos(u)$.

De plus $\cos^{(4k)} 0| = \cos(0) = 1$, $\cos^{(4k+1)}(0) = -\sin(0) = 0$, $\cos^{(4k+2)}(0) = -\cos(0) = -1$ et $\cos^{(4k+3)}(0) = \sin(0) = 0$, donc $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k$ et $\cos^{(2k+1)}(0) = 0$, ce qui donne :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \cos(tx) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(xt)^{2k}}{(2k)!}$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{h}(x) = 2\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}t^{2n}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on introduit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : t \mapsto (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}g_n(t)$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ puisque g_n l'est.

• D'après ce qui a été écrit précédemment, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ et est de somme $S : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\cos(xt)$ qui est une fonction continue sur $[0,+\infty[$.

• $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty}g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^{2n}I_n}{(2n)!}$, et par le résultat de la question **Q 12**, on a :

$$\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

On a montré en **Q13** que la série $\sum(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2^n n!}$ converge absolument, donc la série $\sum\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{h}(x) = 2\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty}g_n(t)\,\mathrm{d}t$ donc

$$\hat{h}(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty}t^{2n}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Q 16. L'égalité précédente se réécrit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{h}(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{I_n}{(2n)!}x^{2n}$$

Et en utilisant le résultat de la question **Q 12**, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{h}(x) &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{x^{2n}}{2^n n!} \\ &= \sqrt{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{h}(x) &= \sqrt{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\end{aligned}$$

Seconde méthode de calcul de $\hat{h}$:

Q 17. On pose $u : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & h(t)e^{-ixt}\end{array}$, alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{h}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t$.

• On a vu en question **Q 9** que $\forall x \in \mathbb{R} \quad t \mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

• $\forall t \in \mathbb{R}, \quad x \mapsto u(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction $x \mapsto \cos(xt) - i\sin(xt)$ l'est.

• $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -ith(t)e^{-ixt}$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad t \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = |t|e^{-\frac{t^2}{2}}$.

On pose $\varphi : t \mapsto |t|e^{-\frac{t^2}{2}}$. φ est paire et continue sur $\mathbb{R}$ et par croissances comparées $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, alors φ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0]$ par parité avec le changement de variable $t = -u$.

φ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Par théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$, on sait $\boxed{\hat{h} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \hat{h}'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t\ .}$

Q 18. On vient d'obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{h}'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-\frac{t^2}{2}}e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = i\int_{-\infty}^{+\infty} h'(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

Les fonctions $h : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $v : t \mapsto e^{-ixt}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $|h(t)v(t)| = h(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ donc

$\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)v(t) = 0 = \lim\limits_{t\to-\infty} h(t)v(t)$, et par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R}\quad \hat{h}'(x) &= i\int_{-\infty}^{+\infty} h'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= i\left([h(t)v(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)v'(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 0 - i\int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \\
\forall x\in\mathbb{R}\quad \hat{h}'(x) &= -x\hat{h}(x)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\hat{h} \text{ est solution de l' équation différentielle linéaire du premier ordre } (E) : \quad y' + xy = 0.}$

Q 19. L'équation (E) est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficient continu de la forme $y'+a(x)y = 0$, on sait alors que ses solutions à valeurs complexes sont les fonctions $x \mapsto \alpha\exp(-A(x))$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$ et A une primitive de $a : x\mapsto x$.

$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } x\mapsto \alpha e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ avec } \alpha\in\mathbb{C}.}$

La fonction $\hat{h}$ est une solution de (E) (a priori à valeurs complexes d'après son expression première) alors il existe un complexe α tel que $\forall x\in\mathbb{R}\quad \hat{h}(x) = \alpha e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $\alpha = \hat{h}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ d'après le résultat de la question **Q 8**.

$\boxed{\text{On retrouve bien le résultat de la question Q 16 : } \forall x\in\mathbb{R}\quad \hat{h}(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}.}$

Q 20. On déduit de ce qui précède que $\boxed{\hat{h} = \sqrt{2\pi}\quad h.}$