Exercice 1

Montrer que si A est une matrice diagonalisable alors toute matrice semblable à A est aussi diagonalisable.

Exercice 2

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{ij} = i$. Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 3

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficients strictement positifs telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ (on dit que A est une matrice stochastique strcitement positive).

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. En considérant un vecteur propre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre 1 et $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_{i_0} = \underset{1 \leqslant j \leqslant n}{max}(x_j)$, montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.
3. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A alors $|\lambda| \leqslant 1$.

Exercice 4

Soit $a \in \mathbf{R}$ et $f : P \in \mathbf{R}_n[X] \mapsto (X-a)P' + P - P(a)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres de f.
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.
2. En déduire $Sp(B)$ en fonction de $Sp(A)$.

Exercice 6

On considère A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1. Que peut-on dire de la matrice $\chi_A(B)$ si A et B n'ont pas de valeur propre commune ?
2. On suppose qu'il existe une matrice carrée C non nulle telle que $AC = CB$.
   Montrer que pour tout polynôme P on a $P(A).C = C.P(B)$. En déduire que A et B ont une valeur propre commune.
3. Rappelez le lien entre les valeurs propres d'une matrice et celles de sa transposée.
4. Montrer que si A et B ont une valeur propre commune alors il existe une matrice C non nulle telle que $AC = CB$.

Exercice 7

Soit A un polynôme scindé à racines simples de degré n. Soit B un polynôme de degré n n'ayant aucune racine commune avec A. On note φ l'application qui à un polynôme P de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ associe le reste de la division eulidienne de PB par A.

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$.
2. Montrer que φ est diagonalisable.
   On pourra introduire les polynômes d'interpolaltion de Lagrange associés aux racines $a_1, \ldots, a_n$ de A.

Exercice 8

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2\alpha & \alpha+5 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de α, M_α est-elle diagonalisable ?
2. Trouver P telle que $M_{-1} = P.D.P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $A^2 = M_{-1} \Longleftrightarrow B^2 = D$, avec l'expression de B à trouver.
4. Montrer que si U et V sont deux matrices telles que $U^2 = V$ alors U et V commutent.
5. Trouver A telle que $A^2 = M_{-1}$.

Exercice 9

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^2)$, on suppose que f n'est pas diagonalisable.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ et un complexe α tels que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^2)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe des complexes a et b tels que $g = af + bId_{\mathbf{C}^2}$.

Exercice 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer qu'il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que $M = Q.\begin{pmatrix} -A & O_n \\ O_n & 3A \end{pmatrix}.Q^{-1}$.
3. Exprimer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.

Exercice 11

Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifient $M^4 = M$ et $tr(M) = n$.

Exercice 12

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et B sont semblables et expliciter une matrice P inversible ne contenant que des coefficients nuls ou égaux à 1 telle que $A = P.B.P^{-1}$.
2. Déterminer les suites réelles $(x_n), (y_n)$ et (z_n) qui vérifient $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + z_n \\ z_{n+1} &= x_n - y_n + 2z_n \end{cases}$$