Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème n°1 : Polynômes - Matrices par blocs

Notations et définitions.

On note $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour $n \in \mathbf{N}^*, \mathbf{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées complexes de taille n et $\mathbf{GL}_n$ le groupe des matrices complexes inversibles de taille n. On rappelle que deux matrices A et B de $\mathbf{M}_n$ sont semblables si

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n, \quad A = P^{-1}BP.$$

Pour toute matrice $A \in \mathbf{M}_n$ le polynôme caractéristique de A est défini par

$$\forall x \in \mathbf{C} \quad \chi_A(x) = \det(xI_n - A).$$

On va étudier deux cas d'une matrice semblable à son inverse.

La partie 3 est indépendante des parties 1 et 2. La partie 2 utilise des résultats de la partie 1, résultats qui pourront être admis.

Partie 1. Polynômes réciproques.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré p est dit réciproque lorsqu'il satisfait l'égalité

$$P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$$

1. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré p. On écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, où $a_0, \dots a_p$ sont des nombres complexes, et $a_p \neq 0$.
   Montrer que P est réciproque si et seulement si pour tout entier $k, 0 \leq k \leq p$, on a l'égalité $a_k = a_{p-k}$.

2. Soit P un polynôme de degré p écrit sous forme factorisée $P = a_p \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les racines complexes distinctes de P et $m_1, \dots, m_d$ leurs multiplicités.

   Écrire sous forme factorisée le polynôme $X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$ et démontrer que si P est réciproque alors pour tout entier $i, 1 \leq i \leq d, \lambda_i$ est non nul et $\frac{1}{\lambda_i}$ est racine de P avec la multiplicité m_i.

3. Soit Q un polynôme de degré p. On dit que Q est antiréciproque si

   $$Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right)$$

   Montrer que si Q est antiréciproque, 1 est une racine de Q et qu'il existe un polynôme P constant ou réciproque tel que $Q = (X-1)P$.

Soit R un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ ayant la propriété suivante : Toute racine a de R est non nulle et $\dfrac{1}{a}$ est racine de R de même multiplicité que a.

4. Démontrer que le produit des racines de R, comptées avec multiplicités, ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1. On pourra remarquer que l'égalité $a = \dfrac{1}{a}$ n'a lieu que pour $a = 1 \text{ou} -1$.

5. En déduire que R est réciproque ou antiréciproque.

Partie 2. Le cas diagonalisable

Soit A une matrice appartenant à $\mathbf{GL}_n$.

6. Soit x un nombre réel non nul. Exprimer $\det(xI_n - A)$ en fonction de x, $\det A$ et $\det\left(\dfrac{1}{x}I_n - A^{-1}\right)$.

7. On suppose dans cette question que A est semblable à son inverse. Préciser les valeurs que peut prendre le déterminant de A, et en déduire que χ_A est soit réciproque, soit antiréciproque.

8. Soit $B \in \mathbf{M}_n$ une matrice diagonalisable. On suppose que le polynôme caractéristique de B est réciproque ou antiréciproque. Démontrer que B est inversible et semblable à son inverse.

9. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à son inverse (bien que son polynôme caractéristique $(X-2)^2\left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2$ soit réciproque).

   On pourra s'intéresser au rang de $B - 2I_n$ et de $B^{-1} - 2I_n$.

Ainsi, hors du cas diagonalisable, le polynôme caractéristique ne suffit pas à caractériser les matrices semblables à leur inverse.

Partie 3. Produits de matrices de symétries.

On dit qu'un endomorphisme f d'un C -espace vectoriel E est une symétrie si $f \circ f = Id_E$. On dit qu'une matrice $S \in \mathbf{M}_n$ est une matrice de symétries si $S^2 = I_n$.

10. Démontrer que si S_1 et S_2 sont deux matrices de symétrie, la matrice produit $A = S_1S_2$ est inversible et semblable à son inverse.

11. Si une matrice A est un produit de deux matrices de symétries, en est-il de même de toute matrice semblable à A ?

Soit B et C deux matrices de $\mathbf{GL}_n$. Soit $A \in \mathbf{M}_{2n}$ la matrice définie par blocs suivante :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix}$$

12. Soit S_1 la matrice par blocs
$$S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}$$
où P, Q sont deux éléments de $\mathbf{GL}_n$. Déterminer les conditions reliant B, C, P, Q pour que les matrices S_1 et $S_2 = S_1 A$ soient des matrices de symétries.

13. En déduire que si C est semblable à B^{-1}, alors A est un produit de deux matrices de symétries.

Problème n°2 : Quelques endomorphismes

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, par convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note :
$$u^k = \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{k \text{ fois}}$$
Soient $k \in \mathbb{N}$ et $F_1, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E. Lorsque la somme $F_1 + \ldots + F_k$ est directe, on la note $\bigoplus_{i=1}^{k} F_i$.
Par convention, si $k = 0$ (cas d'une somme vide), la somme vaut $\{0\}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $M_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices de taille $p \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_p[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à p.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On admet que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + 2q = n$ et des sous-espaces vectoriels $D_1, \ldots, D_p, P_1, \ldots, P_q$ de E stables par u, les D_i étant de dimension 1 et les P_j de dimension 2, tels que :
$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} D_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} P_j.$$

(ii) Il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + 2q = n$ et une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs de taille 1 ou 2. Autrement dit :
$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \exists (M_1, \ldots, M_q) \in M_2(\mathbb{K})^q : \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & \lambda_p & & & \\ & & & M_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & M_q \end{pmatrix}.$$

Dans tout le problème, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des endomorphismes de E qui vérifient (i) ou (ii).

Partie I : Deux exemples

Dans cette partie, on note $E = \mathbb{K}_2[X]$. On définit u et v dans $\mathcal{L}(E)$ par :

$$\begin{array}{rcl} u : E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & X^2P'' + P' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} v : E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

Étude de u

14. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$. Est-elle diagonalisable ?

15. Déterminer $\operatorname{Ker} u^2$ et justifier que $\operatorname{Ker} u^2$ est un sous-espace vectoriel stable par u.

16. Donner une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et conclure que $u \in \mathcal{D}$.

Étude de v

17. Donner la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

18. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension 1 stables par v.

19. Montrer que $\mathbb{K}_1[X]$ est le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 2 stable par v.

20. En déduire que $v \notin \mathcal{D}$.

21. $\mathcal{D}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$?

Partie II - Le cas des endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$.
Dans ce cas, le plus petit entier naturel k vérifiant $u^k = 0$ est appelé *indice de nilpotence* de u.

Dans la suite, on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des endomorphismes de E nilpotents et on pose :

$$\mathcal{N}_2 = \{u \in \mathcal{L}(E) : u^2 = 0\}.$$

Dans toute cette partie, $u \in \mathcal{N}$ est un endomorphisme nilpotent d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ et de rang $r \in \mathbb{N}$.

On note :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}).$$

Cas $n = 1$

22. Que dire de u si $\dim E = 1$?

Cas $n = 2$

On suppose dans ce cas que $\dim E = 2$ et que u est non nul.

23. Soit $x \in E$ tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$. Justifier que $(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \dots, u(x), x)$ est une famille libre.

24. En déduire que $k = 2$, puis que $u \in \mathcal{N}_2$.

Cas général

E désigne maintenant un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

25. Montrer que $\mathcal{D} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_2$.

Soit $u \in \mathcal{N}_2$.

25. Justifier que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ et que $r \leqslant n - r$.

26. Notons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} u$ que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_{n-r})$ de $\operatorname{Ker} u$.
Soient $f_1, \dots, f_r$ dans E tels que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $u(f_i) = e_i$.
Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r)$ est une base de E.

27. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme diagonale par blocs :
$$\begin{pmatrix} 0_{n-2r} & & & \\ & J & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & J \end{pmatrix}$$
où 0_{n-2r} désigne la matrice nulle de $M_{n-2r}(\mathbb{K})$ et où les autres blocs diagonaux égaux à J sont en nombre r.

28. En déduire que $\mathcal{N}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$.

Fin de l'énoncé

Le sujet comportent deux problèmes qui sont à traiter tous les deux mais :

- **les 5/2 commenceront impérativement par le problème n°1**
- **les 3/2 auront plutôt intérêt à commencer par le problème n°2.**