PSI - Devoir à rendre le mercredi 2 décembre 2026

Dans l'ensemble du problème, on note R le corps des réels et N l'ensemble des entiers naturels.

Le but du problème est de construire des matrices de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathrm{R})$ ayant leurs valeurs propres et leur diagonale imposées. La première partie est indépendante des deux autres.

Première partie

Soit $\mathrm{E} = \mathrm{R}_{2\mathrm{n}}[\mathrm{X}]$, l'espace vectoriel réel des polynomes de degré au plus $2n$, avec $n \in \mathrm{N}$. Si $\mathrm{P} \in \mathrm{E}, \mathrm{P}'$ désigne sa dérivée.

On considère $\Phi : P \mapsto \Phi(P)$ avec

$$\Phi(P)(X) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right) P'(X) + 2nXP(X)$$

I.1. Montrer que Φ définit un endomorphisme de E.

I.2. On considère l'équation différentielle

(E) $\left(\frac{1}{4} - x^2\right) \mathrm{y}' + (2nx - \lambda)\mathrm{y} = 0 \quad$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$.

a. Résoudre E_λ sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

b. A quelle condition sur $\lambda, \mathrm{E}_\lambda$ possède-t-elle une solution polynomiale non nulle ? Ce polynome est-il solution de E_λ surR ?

c. En déduire les valeurs propres et sous-espaces propres de Φ.

d. Φ est-elle diagonalisable ?

I.3. Soit $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \ldots, \mathrm{X}^{2\mathrm{n}})$ la base canonique de E . Déterminer la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

I.4. En utilisant la matrice identité, déterminer une matrice dont les valeurs propres sont les entiers $(0, 1, 2, \ldots, 2\mathrm{n})$ et dont les élements diagonaux sont tous égaux.

I.5. Construire un endomorphisme Ψ de E tel que $\Psi(\mathrm{P})$ s'exprime en fonction de P et P′ et admettant $\{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$ comme valeurs propres.

I. 6. Construire un endomorphisme Λ de E tel que Λ(P) s'exprime en fonction de P, P' et P" et admettant $\{0, 1, 2^2, 3^2, \ldots, (2n)^2\}$ comme valeurs propres.

Deuxième partie

Dans cette partie, on cherche à déterminer les réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tels que $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ait une valeur propre unique λ d'ordre 5.
I_5 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbf{R})$.

II.1. Déterminer alors la valeur propre unique λ de A et le polynome caractéristique de A noté $P(X)$.

II.2. Pour x réel, en développant $det(xI_5 - A)$ suivant la dernière colonne, montrer l'égalité des fractions rationnelles :

$$\frac{(X-2)^5}{(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)} = X + \frac{\alpha_1}{X-1} + \frac{\alpha_2}{X-2} + \frac{\alpha_3}{X-3} + \frac{\alpha_4}{X-4}$$

II. 3. Calculer α_2 puis calculer α_1, α_3, et α_4. Montrer qu'alors A répond au problème posé.

II.4. Déterminer le sous-espace propre de A.

Troisième partie

On cherche maintenant 2 n réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ tels que la matrice A $\in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$, ait une valeur propre unique d'ordre $(2n+1)$.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{n} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \alpha_{2n} \\ 0 & 2n-1 & \cdot & & & 0 & \alpha_{2n-1} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & 2 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & \alpha_1 \\ -1 & -1 & \cdot & . & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

I_{2n+1} désigne maintenant la matrice identité de $\mathcal{M}_{2\mathrm{n}+1}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$.

III.1. Déterminer la valeur propre unique et le polynome caractéristique de A.

III.2. Pour $x \in \mathrm{R}$, développer $det(xI_{2n+1} - A)$ suivant la dernière colonne.

III.3. En utilisant la fraction rationnelle $\dfrac{(\mathrm{X}-\mathrm{n})^{2\mathrm{n}+1}}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)\ldots(\mathrm{X}-2\mathrm{n})}$, montrer que $\forall i \in [\![1, 2n]\!] \quad \alpha_{\mathrm{i}} = (-1)^{i-1}\dfrac{(\mathrm{n}-\mathrm{i})^{2\mathrm{n}+1}}{(\mathrm{i}-1)!(2\mathrm{n}-\mathrm{i})!}$. (avec la convention $0! = 1$).

III. 4. Montrer que la dimension de l'unique sous-espace propre est 1.

On cherchera les vecteurs de ce sous-espace propre sous la forme $\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{2n} \end{pmatrix}$

sans remplacer les α_i *par leur valeur obtenue au* III.3.