Exercice 1

Pour X et Y dans $\mathcal{M}_{21}(\mathbf{R})$, on pose $\langle X|Y\rangle = X^T.\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}.Y$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{21}(\mathbf{R})$.
2. Déterminer l'orthogonal de la droite engendrée par $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit E un espace préhilbertien réel, a un vecteur normé fixé.
Déterminer les réels k tels que l'application $\varphi : (x,y) \in E^2 \mapsto \langle x|y\rangle + k\langle x|a\rangle\langle y|a\rangle$ soit un produit scalaire sur E.

Exercice 3

Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $2x^2+y^2+5z^2 \leqslant 1$. Montrer que $(x+y+z)^2 \leqslant \dfrac{7}{10}$.

Exercice 4

Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue et positive. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que $\forall (n,m) \in \mathbf{N}^2 \quad I_{n+m}^2 \leqslant I_n \times I_m$.

Exercice 5

On munit l'espace préhilbertien réel $\mathbf{R}^4$ de son produit scalaire canonique.
On considère les vecteurs $u = (1,1,1,1)$ et $v = (1-x, x-y, y-z, z)$ où $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

1. Calculer le produit scalaire $\langle u|v\rangle$.
2. Déterminer l'ensemble des triplets $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tels que :

$$(1-x)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

Exercice 6

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ du produit scalaire $(A,B) \mapsto tr(A^TB)$.

1. Déterminer l'orthogonal de $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad tr(M) = 0\}$.
2. Déterminer l'orthogonal de $D_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 7

Soit E un espace préhilbertien réel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Montrer que si E est euclidien alors il y a égalité.

Exercice 8

Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $f \in \mathcal{L}(F,G)$ et $g \in \mathcal{L}(G,F)$ telles que

$$\forall (x,y) \in F \times G \quad \langle f(x)|y\rangle = \langle x|g(y)\rangle$$

1. Montrer que $F = Ker(f) \overset{\perp}{\oplus} Im(g)$.
2. Montrer que f est injective $\iff$ g est surjective.
3. Montrer que f est surjective $\iff$ g est injective.

Exercice 9

On pose $E = \mathbf{R}_3[X]$, $U_3 = \{P \in E, \backslash \exists (a,b,c) \in \mathbf{R}^3, \quad P = X^3 + aX^2 + bX + c\}$.
On considère l'application $\Phi : (P,Q) \in E^2 \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$.

1. Montrer Φ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer l'existence et l'unicité de $A \in E$ tel que $\Phi(A,A) = inf\,\{\Phi(P,P), \quad P \in U_3\}$.
3. Calculer A et $\Phi(A,A)$.

Exercice 10

Soit $a_0, \ldots, a_n$ $n+1$ réels. On se place dans $\mathbf{R}_n[X]$.

1. A quelle condition $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire ?

   On suppose maintenant que cette condition est vérifiée.

2. Soit $F = \left\{ P \in \mathbf{R}_n[X], \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel et donner sa dimension.
   (b) Donner la dimension de $F^\perp$. En déduire $F^\perp$.
   (c) Déterminer la distance d'un polynôme P à $F^\perp$.

Exercice 11

1. Montrer que $t \mapsto \ln^2(t)$ est intégrable sur $]0,1]$.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $]0,1]$ est un espace vectoriel.
3. Montrer que l'application $(a,b) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \displaystyle\int_0^1 (\ln(t) - at - b)^2 \mathrm{d}t$ possède un minimum sur $\mathbf{R}^2$.
4. Déterminer la valeur de ce minimum et les points en lesquels il est atteint.

Exercice 12

Soit $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme U_n de $\mathbf{R}_n[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X] \quad P(0) = \int_{-1}^{1} P(t)U_n(t)\mathrm{d}t$$

3. Calculer U_2.