Problème n°1 : Extrait de Mines-Ponts 2025 PC-PSI

Notations et définitions.

On note $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées complexes de taille n et $\mathbf{GL}_n$ le groupe des matrices complexes inversibles de taille n. On rappelle que deux matrices A et B de $\mathbf{M}_n$ sont semblables si

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n, \quad A = P^{-1}BP.$$

Pour toute matrice $A \in \mathbf{M}_n$ le polynôme caractéristique de A est défini par

$$\forall x \in \mathbf{C} \quad \chi_A(x) = \det(xI_n - A).$$

Partie 1. Polynômes réciproques.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré p est dit réciproque lorsqu'il satisfait l'égalité

$$P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$$

1. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré p. On écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, où $a_0, \dots a_p$ sont des nombres complexes, et $a_p \neq 0$.

   On rappelle que deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

$$\begin{aligned}
P \text{ est réciproque} &\iff P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right) _ \\
&\iff \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = X^p \sum_{k=0}^{p} a_k X^{-k} \\
&\iff \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = \sum_{k=0}^{p} a_k X^{p-k} \\
&\qquad \text{et par le changement d'indice } i = p - k \\
&\iff \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = \sum_{i=0}^{p} a_{p-i} X^i \\
P \text{ est réciproque} &\iff \forall k \in [\![0, p]\!] \quad a_k = a_{p-k}
\end{aligned}$$

> P est réciproque si et seulement si pour tout entier $k, 0 \leq k \leq p$, on a l'égalité $a_k = a_{p-k}$.

2. Soit P un polynôme de degré p écrit sous forme factorisée $P = a_p \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les racines complexes distinctes de P et $m_1, \dots, m_d$ leurs multiplicités.

• D'après la forme factorisée du polynôme P on a $p = \sum_{i=1}^{d} m_i$ et :

$$\begin{aligned} X^p P\left(\frac{1}{X}\right) &= a_p X^p \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{1}{X} - \lambda_i\right)^{m_i} \\ &= a_p X^p \prod_{i=1}^{p} \left(\frac{1-\lambda_i X}{X}\right)^{m_i} \\ &= a_p X^p \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{(1-\lambda_i X)^{m_i}}{X^{m_i}}\right) \\ &= a_p X^p \frac{\prod_{i=1}^{d}(1-\lambda_i X)^{m_i}}{X^{m_1+m_2+\cdots+m_d}} \end{aligned}$$

$X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = a_p \prod_{i=1}^{d} (1-\lambda_i X)^{m_i}$ qui est bien un polynôme sous forme factorisée

• Si P est réciproque alors on a vu que $a_p = a_0$ or $a_0 = P(0)$ et $a_p \neq 0$ donc $P(0) \neq 0$. P n'admet pas 0 pour racine donc $\forall i \in [\![1, p]\!] \quad \lambda_i \neq 0$.
C'est la façon la plus simple et rapide de prouver que les racines de P ne sont pas nulles.

• Si P est réciproque alors $P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$, donc en reprenant les factorisations de $X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$ et de $P(X)$, on obtient

$$a_p \prod_{i=1}^{d} (X-\lambda_i)^{m_i} = a_p \prod_{i=1}^{d} (1-\lambda_i X)^{m_i} = a_p \prod_{i=1}^{d} (-\lambda_i)^{m_i} \left(X - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i}$$

Par identification du coefficient dominant $a_p = a_p \prod_{i=1}^{d} (-\lambda_i)^{m_i}$ et puisque $a_p \neq 0$, on a

$\prod_{i=1}^{d} (-\lambda_i)^{m_i} = 1$ donc

$$P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = a_p \left(\prod_{i=1}^{d} (-\lambda_i)^{m_i}\right) \left(\prod_{i=1}^{d} \left(X - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i}\right) = a_p \prod_{i=1}^{d} \left(X - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i}$$

On a donc pour tout entier $i, 1 \leq i \leq d, \lambda_i$ est non nul et $\frac{1}{\lambda_i}$ est racine de P avec la multiplicité m_i.

3. Soit Q un polynôme de degré p. On suppose que Q est antiréciproque donc

$$Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right)$$

En évaluant l'égalité ci-dessus en 1, on obtient $Q(1) = -Q(1)$ donc $Q(1) = 0$, on en déduit que 1 est une racine de Q et donc qu'il existe un polynôme P de degré égal à $p-1$ tel que $Q = (X-1)P$.

Soit P est constant, soit P est de degré $p-1 \geqslant 1$ et dans ce cas puisque $Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right)$ on a :

$$(X-1)P(X) = -X^p\left(\frac{1}{X}-1\right)P\left(\frac{1}{X}\right) = -X^{p-1}(1-X)P\left(\frac{1}{X}\right) = (X-1)X^{p-1}P\left(\frac{1}{X}\right)$$

Après simplification par $X-1$, on obtient $P(X) = X^{p-1}P\left(\frac{1}{X}\right)$ et donc P est réciproque.

On a bien montré que si Q est antiréciproque alors 1 est racine de Q et il existe un polynôme P constant ou réciproque tel que $Q = (X-1)P$.

Soit R un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ ayant la propriété suivante : Toute racine a de R est non nulle et $\frac{1}{a}$ est racine de R de même multiplicité que a.

4. *1ère méthode : je reprends ici une méthode que beaucoup ont tenté d'utiliser mais sans rigueur suffisant*

Avec l'hypothèse faite sur les racines de R, sachant que $a = \frac{1}{a}$ n'est vrai que pour $a = 1$ ou -1, on va poser :

- $m_{-1} = 0$ si (-1) n'est pas racine de R, et si (-1) est racine de R alors m_{-1} est sa multiplicité,
- $m_1 = 0$ si 1 n'est pas racine de R, et si 1 est racine de R alors m_1 est sa multiplicité.
- $a_2, \ldots, a_p, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_p}$ sont les racines de R différentes de 1 et de -1 et toutes distinctes deux à deux de multiplicité respectives $m_2, \ldots, m_p, m_2, \ldots, m_p$, avec $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $m_i = 0$ si R n'a pas d'autres racines que 1 et/ou (-1),
- α le coefficient dominant de R.

Avec ces notations on peut écrire :

$$R = \alpha(X+1)^{m_{-1}}(X-1)^{m_1}\prod_{i=2}^{p}(X-a_i)^{m_i}\left(X-\frac{1}{a_i}\right)^{m_i}$$

Le produit des racines comptées avec leur multiplicité est donc

$$\rho = (-1)^{m_{-1}} \times 1^{m_1} \times \prod_{i=2}^{p} a_i^{m_i} \times \left(\frac{1}{a_i}\right)^{m_i} = (-1)^{m_{-1}}$$

.

Le produit des racines de R est donc égal à 1 ou -1.

2nde méthode : plus rapide

Notons $S = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble des racines distinctes de R. Par hypothèse sur R, S nne contient pas 0 et $S = \left\{\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right\}$. De plus pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ ⋮ λ_i et $\frac{1}{\lambda_i}$ sont des racines de même multiplicité donc le produit des racines de R, noté ρ vérifie :

$$\rho = \prod_{i=1}^{d}\lambda_i^{m_i} = \prod_{i=1}^{d}\left(\frac{1}{\lambda i}\right)^{m_i} = \prod_{i=1]}^{d}\frac{1}{\lambda_i^{m_i}} = \frac{1}{\rho}$$

Or $\rho = \dfrac{1}{\rho} \iff \rho \in \{-1, 1\}$ donc | le produit des racines de R est égal à 1 ou -1. |

5. Reprenons les notations $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les racines distinctes de R et $m_1, \ldots, m_d$ leurs multiplicités, notons aussi r le degré de R et α_r le coefficient dominant de R. Vu les hypothèses faites sur les racines de R on peut écrire :

$$R = \alpha_r \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i} = \alpha_r \prod_{i=1}^{d} \left(X - \frac{1}{\lambda_i} \right)^{m_i}$$

en posant $\rho = \prod_{i=1}^{d} \lambda_i^{m_i}$ et puisque $r = deg(R) = \sum_{i=1}^{d} m_i$, on a :

$$\begin{aligned} R(X) &= \alpha_r \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i} \\ &= \alpha_r \prod_{i=1}^{d} \left(-\lambda_i X \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{\lambda_i} \right) \right)^{m_i} \\ &= \alpha_r \left(\prod_{i=1}^{d} (-\lambda_i)^{m_i} \right) X^r \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{\lambda_i} \right)^{m_i} \\ R(X) &= (-1)^r \rho X^r R\left(\frac{1}{X} \right) \end{aligned}$$

On a montré précédemment que ρ est égal à 1 ou -1, donc on obtient $R(X) = X^r R\left(\dfrac{1}{X}\right)$ ou $R(X) = -X^r R\left(\dfrac{1}{X}\right)$ avec $r = deg(R)$. | Donc R est réciproque ou antiréciproque. |

Partie 2. Le cas diagonalisable.

Soit A une matrice appartenant à $\mathbf{GL}_n$.

6. Soit x un nombre réel non nul. D'après les propriétés du déterminant d'une matrice inversible

d'ordre n, on a :

$$\begin{aligned}
\det(xI_n - A) &= det(A \times (xA^{-1} - I_n)) \\
&= det(A) \times det(xA^{-1} - I_n) \\
&= det(A) \times det\left(x\left(A^{-1} - \frac{1}{x}I_n\right)\right) \\
&= x^n \times det(A) \times det\left(A^{-1} - \frac{1}{x}I_n\right) \\
&= x^n \times det(A) \times det\left(-\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right)\right) \\
det(xI_n - A) &= (-x)^n \times det(A) \times det\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right)
\end{aligned}$$

7. On suppose dans cette question que A est semblable à son inverse.
Il existe donc une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}.A^{-1}.P$, ce qui entraine $det(A) = det(P^{-1}) \times det(A^{-1}) \times det(P)$, or $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$ et $det(P^{-1}) = \dfrac{1}{det(P)}$, donc il vient

$$det(A) = \frac{1}{det(A)}$$

Le déterminant de A ne peut prendre que les valeurs 1 ou (-1).

D'après l'égalité de la question 6, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \quad \chi_A(x) = (-1)^n \times det(A) \times x^n \times \chi_{A^{-1}}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

Or deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique donc (1) devient :

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \quad \chi_A(x) = (-1)^n det(A) \times x^n \chi_A\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc $\chi_A(X) = (-1)^n det(A) \times X^n \chi_A\left(\dfrac{1}{X}\right)$, et puisque $(-1)^n det(A) \in \{-1, 1\}$, on obtient :

χ_A est réciproque ou antiréciproque.

8. Soit $B \in \mathbf{M}_n$ une matrice diagonalisable. On suppose que le polynôme caractéristique de B est réciproque ou antiréciproque.

• Si le polynôme caractéristique de B est réciproque alors par le résultat de la question 2 on sait que 0 n'est pas racine de χ_B.

Si χ_B est antiréciproque alors par la question 3, $\chi_B = (X - 1)P$ avec P constant non nul ou réciproque, alors 0 n'est pas racine de χ_B.

Dans tous les cas 0 n'est pas valeur propre de B, $\boxed{B \text{ est donc inversible}}$ (ou bien écrire $\chi_B(0) \neq 0$ or $\chi_B(0) = det(-B) = (-1)^n det(B)$ donc $det(B) \neq 0$).

1ère méthode : sans utilisation de la question 6

B est diagonalisable alors il existe une matrice D diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de B comptées avec leur multiplicité et une matrice P inversible telles que $B = P.D.P^{-1}$, alors $B^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1}$ et D^{-1} est diagonale avec ses coefficients diagonaux qui sont les inverses des coefficients diagonaux de D, donc B^{-1} est aussi diagonalisable.

Avec les questions 2 et 3, χ_B étant réciproque ou antiréciproque, toute racine a de χ_B est non nulle et $\dfrac{1}{a}$ est racine de χ_B de même multiplicité que a, on en déduit que les coefficients diagonaux de D et D^{-1} sont globalement les mêmes (seul l'ordre peut changer), donc B et B^{-1} ont les mêmes valeurs propres avec même multiplicité.

B et B^{-1} sont diagonalisables avec les mêmes valeurs propres avec même multiplicité alors B et B^{-1} sont semblables à la même matrice diagonale Δ dont les coefficients diagonaux sont leurs valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On en déduit que $\boxed{B \text{ et } B^{-1} \text{ sont semblables.}}$

• *2nde méthode : utilisation de la question 6*

Avec le résultat de la question 6 appliqué à B^{-1}, on a :

$$\chi_{B^{-1}}(X) = (-X)^n det(B^{-1}) \chi_B\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{(-1)^n}{det(B)} X^n \chi_B\left(\frac{1}{X}\right)$$

χ_B étant réciproque ou antiréciproque, on a $\chi_{B^{-1}}(X) = \dfrac{(-1)^n}{det(B)}\chi_B(X)$ ou $\chi_{B^{-1}}(X) = -\dfrac{(-1)^n}{det(B)}\chi_B(X)$.
Or χ_B et $\chi_{B^{-1}}$ sont tous deux unitaires (de coefficient dominant égal à 1) donc $\chi_{B^{-1}} = \chi_B$.
B et B^{-1} ont donc les mêmes valeurs propres avec même multiplicité. De plus B est diagonalisable alors il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $B = P.D.P^{-1}$, alors $B^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1}$ et D^{-1} est diagonale, donc B^{-1} est aussi diagonalisable.

B et B^{-1} sont diagonalisables avec les mêmes valeurs propres et même multiplicité alors B et B^{-1} sont semblables à la même matrice diagonale Δ dont les coefficients diagonaux sont leurs valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On en déduit que $\boxed{B \text{ et } B^{-1} \text{ sont semblables.}}$

9. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On peut écrire $B = \begin{pmatrix} M & O_2 \\ O_2 & N \end{pmatrix}$ avec $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, alors $B^{-1} = \begin{pmatrix} M^{-1} & O_2 \\ O_2 & N^{-1} \end{pmatrix}$.

Puisque M est diagonale on a immédiatement $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

N est triangulaire supérieure alors $N^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, et on trouve $\alpha = -4$ en écrivant $N \times N^{-1} = I_2$.

B^{-1} la matrice inverse de B est donc $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Si B et B^{-1} sont semblables alors il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}.B^{-1}.P$ donc $B - 2I_n = P^{-1}.B^{-1}.P - 2P^{-}1.I_n.P = P^{-1}(B^{-1} - 2I_n).P$, les matrices $B - 2I_n$ et $B^{-1} - 2I_n$ sont semblables.

Comme on ne change pas le rang d'une matrice en la multipliant par une matrice inversible, on doit avoir $rg(B - 2I_n) = rg(B^{-1} - 2I_n)$, or $rg(B - 2I_n) = rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} = 2$ et

$rg(B^{-1} - 2I_n) = rg \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$

On en déduit que $\boxed{B \text{ n'est pas semblable à sa matrice inverse } B^{-1}.}$

Ainsi, hors du cas diagonalisable, le polynôme caractéristique ne suffit pas à caractériser les matrices semblables à leur inverse.

Partie 3. Produits de matrices de symétries.

On dit qu'un endomorphisme f d'un C -espace vectoriel E est une symétrie si $f \circ f = Id_E$. On dit qu'une matrice $S \in \mathbf{M}_n$ est une matrice de symétries si $S^2 = I_n$.

10. Si S_1 et S_2 sont deux matrices de symétrie, alors S_1 et S_2 sont inversibles d'inverses respectives S_1 et S_2 alors par produit de matrices inversibles la matrice $\boxed{A = S_1S_2 \text{ est inversible}}$ et son inverse est $A^{-1} = (S_1S_2)^{-1} = S_2^{-1}.S_1^{-1} = S_2S_1$.

    On en déduit que $S_2^{-1}.A^{-1}.S_2 = S_2.S_2.S_1.S_2 = S_1.S_2 = A$, donc $\boxed{A \text{ est semblable à son inverse.}}$

11. Si une matrice A est un produit de deux matrices de symétries, alors on peut noter $A = S_1.S_2$ avec $S_1^2 = I_n = S_2^2$.

Soit B une matrice semblable à A alors il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}.A.P$.
On peut alors écrire

$$B = P^{-1}S_1.S_2.P = (P^{-1}.S_1.P)(P^{-1}S_2.P)$$

En notant $U_1 = P^{-1}.S_1.P$ et $U_2 = P^{-1}.S_2.P$, on a $B = U_1U_2$ et

$$U_1^2 = P^{-1}S_1P.P^{-1}S_1.P = P^{-1}.S_1^2.P = P^{-1}.I_n.P = P^{-1}.P = I_n$$

de même $U_2^2 = I_n$, donc B est un produit de deux matrrices de symétrie.

Si A est un produit de deux symétries alors il en est de même pour toute matrice semblable à A.

Soit B et C deux matrices de $\mathbf{GL}_n$. Soit $A \in \mathbf{M}_{2n}$ la matrice définie par blocs suivante :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix}$$

12. Soit S_1 la matrice par blocs

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}$$

où P, Q sont deux éléments de $\mathbf{GL}_n$.
Par produit de matrices par blocs, les blocs étant compatibles, on a :

$$S_1^2 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n + PQ & 0_n.P + P.0_n \\ Q.0_n + 0_n.Q & PQ + 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PQ & 0_n \\ 0_n & PQ \end{pmatrix}$$

$$S_2 = S_1A = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & PC \\ QB & 0_n \end{pmatrix}$$

$$S_2^2 = \begin{pmatrix} 0_n & PC \\ QB & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & PC \\ QB & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PCQB & 0_n \\ 0_n & QBPC \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} S_1^2 = I_{2n} \\ S_2^2 = I_{2n} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} PQ = I_n \\ PCQB = I_n \\ QBPC = I_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} Q = P^{-1} \\ B^{-1} = PCP^{-1} \\ C^{-1} = P^{-1}BP \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} Q = P^{-1} \\ B^{-1} = PCP^{-1} \end{array}\right.$$

Les matrices S_1 et $S_2 = S_1A$ sont des matrices de symétries si, et seulement si, $Q = P^{-1}$ et $B^{-1} = PCP^{-1}$.

13. Si C est semblable à B^{-1}, alors il existe une matrice P inversible telle que $C = P^{-1}B^{-1}P$, ou encore $B^{-1} = PCP^{-1}$, alors en posant $S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ P^{-1} & 0_n \end{pmatrix}$ et $S_2 = S_1A$, on a, par les équivalences utilisées dans la question précédente : $S_1^2 = I_{2n}$, $S_2^2 = I_{2n}$ et $S_1S_2 = S_1^2A = A$ donc

A est un produit de deux matrices de symétries.

Problème n°2 : Extrait de CCINP 2026 PSI

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, par convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note :

$$u^k = \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{k \text{ fois}}$$

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $F_1, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E. Lorsque la somme $F_1 + \ldots + F_k$ est directe, on la note $\bigoplus_{i=1}^{k} F_i$.
Par convention, si $k = 0$ (cas d'une somme vide), la somme vaut $\{0\}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $M_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices de taille $p \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_p[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à p.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On admet que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + 2q = n$ et des sous-espaces vectoriels $D_1, \ldots, D_p, P_1, \ldots, P_q$ de E stables par u, les D_i étant de dimension 1 et les P_j de dimension 2, tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} D_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} P_j.$$

(ii) Il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + 2q = n$ et une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs de taille 1 ou 2. Autrement dit :

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \exists (M_1, \ldots, M_q) \in M_2(\mathbb{K})^q : \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & \lambda_p & & & \\ & & & M_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & M_q \end{pmatrix}.$$

Dans tout le problème, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des endomorphismes de E qui vérifient (i) ou (ii).

Partie I : Deux exemples

Dans cette partie, on note $E = \mathbb{K}_2[X]$. On définit u et v dans $\mathcal{L}(E)$ par :

$$\begin{array}{rcl} u : E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & X^2 P'' + P' \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} v : E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

Étude de u

14. Par définition de u, on a $u(1)=0$, $u(X)=1$ et $u(X^2)=2X^2+2X$, donc la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$ est $\boxed{M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&2\end{pmatrix}}$.

M est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont 0 et 2 de multiplicités respectives 2 et 1. D'après les colonnes de M on a immédiatement $rg(M)=2$ donc par le théorème du rang $dimKer(M)=3-2=1$.
La dimension du sous-espace propre de M associé à la valeur propre 0 n'est pas égale à la multiplicité de cette valeur propre 0 donc $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

15. • u^2 est de matrice M^2 dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$, et $M^2=M\times M=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&4\\0&0&4\end{pmatrix}$.

1ère méthode :
Par le théorème du rang : $dimKer(u^2)=3-rg(u^2)=3-rg(M^2)=2$, or d'après la matrice M^2 on sait que $u^2(1)=0=u^2(X)$, de plus $(1,X)$ est libre donc $\boxed{Ker(u^2)=Vect(1,X)=\mathbf{K}_1[X].}$

2nde méthode :
Soit $P\in E$, il existe $(a,b,c)\in\mathbf{K}^3$ tel que $P=aX^2+bX+c$ alors

$$P\in Ker(u^2)\Longleftrightarrow u^2(P)=0\Longleftrightarrow M^2\begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix}=0\Longleftrightarrow\begin{cases}2a=0\\4a=0\\4a=0\end{cases}\Longleftrightarrow a=0$$

Donc $\boxed{Ker(u^2)=\{bX+c,\quad (b,c)\in\mathbf{K}^2\}=\mathbf{K}_1[X].}$

• u et u^2 commutent ($u^2\circ u=u\circ u\circ u=u\circ u^2$), alors on sait que

$\boxed{Ker(u^2) \text{ est un sous-espace vectoriel stable par } u.}$

16. Donner une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ revient à chercher une famille libre de polynômes (P_1,P_2,P_3) de E telle que $u(P_1)=2P_1$, $u(P_2)=0$ et $u(P_3)=P_2$.

• Notons $P_1=a+bX+cX^2$,

$$u(P_1)=2P_1\Longleftrightarrow M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\2b\\2c\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases}b=2a\\2c=2b\\2c=2c\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}b=2a\\c=2a\end{cases}$$

Choisissons $P_1=2X^2+2X+1$.

• On veut deux polynômes non colinéaires P_2 et P_3 tels que $u(P_2) = 0$ et $u(P_3) = P_2$, or on a vu en question 14 que $u(1) = 0$ et $u(X) = 1$ donc on peut prendre $P_2 = 1$ et $P_3 = X$.

La famille $\boxed{(2X^2 + 2X + 1, 1, X)}$ de $\mathbf{K}_2[X]$ est échelonnée en degré donc elle est libre et elle contient 3 éléments, c'est donc une base de $E = \mathbf{K}_2[X]$ dans laquelle la matrice de u est bien

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

On remarque que l'on peut écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 = 2$ et $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, donc u vérifie l'assertion (ii) et donc $\boxed{u \in \mathcal{D}.}$

Étude de v

17. Par définition $v(1) = 0$, $v(X) = 1$ et $v(X^2) = 2X$, donc la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$ est $\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$

18. Si F est un sous-espaces vectoriel de E de dimension 1 stable par v alors il existe $P \neq 0$ tel que $F = Vect(P)$ et P vérifie : $\exists \lambda \in \mathbf{K}, \quad v(P) = \lambda P$, ce qui signifie que λ est une valeur propre de v et P un vecteur propre associé.
Or d'après la matrice triangulaire N de v, la seule valeur propre de v est $\lambda = 0$ donc $F \subset Ker(v)$.
On remarque que $rg(N) = 2$ donc $Ker(v)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, donc $F = Ker(v)$.

Réciproquement $Ker(v)$ est stable par v (v commute avec v) et est de dimension 1 donc c'est un sous-espace stable par v de dimension 1.

$$P \in Ker(v) \Longleftrightarrow v(P) = 0 \Longleftrightarrow P' = 0 \Longleftrightarrow P \in \mathbf{K}_0[X]$$

$\boxed{\text{Le seul sous-espace stable par } v \text{ de dimension 1 est } Ker(v) = \mathbf{K}_0[X] = Vect(1).}$

19. • Soit $P \in \mathbb{K}_1[X]$, il existe $(a, b) \in \mathbf{K}^2, \quad P = aX + b$, donc par linéarité de v on a :
$v(P) = av(X) + bv(1) = a$ et donc $v(P) \in \mathbf{K}_1[X]$.
$\mathbf{K}_1[X]$ est donc un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 stable par v.

• Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 stable par v, montrons que $F = \mathbf{K}_1[X]$:

Supposons que F contienne un polynôme de degré 2, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbf{K}^* \times \mathbf{K} \times \mathbf{K}$, tel que $aX^2 + bX + c \in F$, donc $v(aX^2 + bX + c) = 2aX + b \in F$ mais alors on a aussi $v(2aX + b) = 2a \in F$.

Puisque $a \neq 0$ la famille $(aX^2 + bX + c, 2aX + b, 2a)$ est une famille de F de polynômes à degrés échelonnés donc cette famille est libre, ce qui est absurde puisque $dim(F) = 2$.

On en déduit que F ne contient pas de polynôme de degré 2 et donc $F \subset \mathbf{K}_1[X]$, et par égalité des dimensions $F = \mathbf{K}_1[X]$.

Le seul sous-espace stable par v de dimension 2 est $\mathbf{K}_1[X]$.

20. D'après les résultats des questions 18 et 19, les seuls sous-espaces stables par v de dimension 1 ou 2 sont : $D_1 = \mathbf{K}_0[X]$ et $P_1 = \mathbf{K}_1[X]$, or D_1 et P_1 ne sont pas supplémentaires puisque $D_1 \subset P_1$ alors v ne peut pas vérifier l'assertion (i).

On en déduit que $v \notin \mathcal{D}$.

21. L'application $\omega : P \in E \mapsto X^2P''$ est un endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui s'écrit donc sous la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ alors $\omega \in \mathcal{D}$.

Si $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ alors $u - \omega \in \mathcal{D}$, ce qui est absurde puisque $u - \omega = v$ avec $v \notin \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Partie II - Le cas des endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$.
Dans ce cas, le plus petit entier naturel k vérifiant $u^k = 0$ est appelé *indice de nilpotence* de u.

Dans la suite, on note N l'ensemble des endomorphismes de E nilpotents et on pose :

$$N_2 = \{u \in \mathcal{L}(E) : u^2 = 0\}.$$

Dans toute cette partie, $u \in N$ est un endomorphisme nilpotent d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ et de rang $r \in \mathbb{N}$.

On note :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}).$$

Cas $n = 1$

22. On suppose que $dim(E) = 1$, alors il existe un vecteur non nul x dans E tel que $E = Vect(x)$. Puisque u est un endomorphisme de E, il existe un scalaire λ tel que $u(x) = \lambda x$ et

$$u^2(x) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x = 0$$

or $x \neq 0$ donc $\lambda = 0$ et finalement $u(x) = 0$. La matrice de u dans la base (x) de E est donc la matrice nulle, on en déduit que u est l'application nulle.

Si $dim(E) = 1$ alors u est l'endomorphisme nul.

Cas $n = 2$

On suppose dans ce cas que $\dim E = 2$ et que u est non nul.

23. Soit $x \in E$ tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$. *Montrons que $(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \dots, u(x), x)$ est une famille libre :*

Soit $(\lambda_{k-1}, \dots, \lambda_0) \in \mathbf{K}^k$ tel que $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i u^i(x) = 0_E$.

Puisque $u^k = 0$, on obtient que $\forall i \geqslant k \quad u^i = u^k \circ u^{i-k} = 0$, alors en appliquant l'endomorphisme u^{k-1} à l'égalité de vecteurs $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i u^i(x) = 0_E$, il vient :

$$\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i u^{i+k-1}(x) = \lambda_0 u^{k-1}(x) + \sum_{j=k}^{2k-2} \lambda_{j-k-1} u^j(x) = \lambda_0 u^{k-1}(x) = u(0_E) = 0_E$$

Or $u^{k-1}(x) \neq 0$ alors $\lambda_0 = 0$.

Soit $j \in [\![0, k-2]\!]$ tel que $\forall \ell \in [\![0, j]\!] \quad \lambda_\ell = 0$.

Alors l'égalité (1) devient $\sum_{i=j+1}^{k-1} \lambda_i u^i(x) = 0_E$.
On applique alors l'endomorphisme u^{k-j-2}, il va rester $\lambda_{j+1} u^{k-1}(x) = 0_E$ donc $\lambda_{j+1} = 0$.
On obtient par cette récurrence finie que $\forall j \in [\![0, k-1]\!] \quad \lambda_j = 0$.
On a ainsi : $\forall (\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) \in \mathbf{K}^k, \quad \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i u^i(x) = 0_E \Longrightarrow \forall i \in [\![0, k-1]\!] \quad \lambda_i = 0$.

La famille $(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \dots, u(x), x)$ est une famille libre de E.

24. Une famille libre de E ne pouvant contenir plus de vecteurs que la dimension de E, le résultat de la question 23 donne $k \leqslant 2$, or $u \neq 0$ donc $k \geqslant 2$. Finalement $k = 2$ donc $u^2 = 0$, ce qui donne $u \in \mathcal{N}_2$.

Cas général

E désigne maintenant un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

25. Soit $u \in \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$. u vérifie donc l'assertion (i) et u est nilpotent d'indice $k \in \mathbf{N}^*$.

Il existe donc des sous-espaces vectoriels $D_1, \dots, D_p$ de dimension 1 et des sous-espaces $P_1, \dots, P_q$ de dimension 2 stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} D_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} P_j$.

Montrons que $u^2 = 0$:

Soit $x \in E$, il existe d'uniques vecteurs $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$ appartenant respectivement à $D_1, \ldots, D_p$, $P_1, \ldots, P_q$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{j=1}^{q} y_j$. Par linéarité de u, on a :

$$u^2(x) = \sum_{i=1}^{p} u^2(x_i) + \sum_{j=1}^{q} u^2(y_j)$$

Notons $v_1, \ldots, v_p, \omega_1, \ldots, \omega_q$ les endomorphismes induits par u respectivement sur $D_1, \ldots, D_p, P_1, \ldots, P_q$, puisque $u^k = 0$ on a aussi $\forall i \in [\![1,p]\!] \quad v_i^k = 0$ et $\forall j \in [\![1,q]\!] \quad \omega_j^k = 0$, alors par les résultats des questions 22 et 24, on sait que $\forall i \in [\![1,p]\!] \quad v_i = 0$ et $\forall j \in [\![1,q]\!] \quad \omega_j^2 = 0$. On en déduit que

$$u^2(x) = \sum_{i=1}^{p} u^2(x_i) + \sum_{j=1}^{q} u^2(y_j) = \sum_{i=1}^{p} v_i^2(x_i) + \sum_{j=1}^{q} \omega_j^2(y_j) = 0_E$$

Finalement $\forall x \in E \quad u^2(x) = 0$ donc $u \in \mathcal{N}_2$.

On a montré que $\mathcal{D} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_2$.

Soit $u \in \mathcal{N}_2$.

26. Soit $y \in \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ alors $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0_E$, donc $y \in \operatorname{Ker} u$.

$\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.

E étant de dimension finie égale à n, le théorème du rang donne :

$$n = dim(E) = dim\operatorname{Im} u + dim\operatorname{Ker} u = r + dim\operatorname{Ker} u$$

On a donc $dim\operatorname{Ker} u = n - r$ et puisque $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, on a $dim\operatorname{Im} u \leqslant dim\operatorname{Ker} u$ donc $r \leqslant n - r$.

27. Notons $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} u$ que l'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_{n-r})$ de $\operatorname{Ker} u$. Soient $f_1, \ldots, f_r$ dans E tels que pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $u(f_i) = e_i$.

Montrons la famille $(e_1, \ldots, e_{n-r}, f_1, \ldots, f_r)$ est une famille libre :

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}, \mu_1, \ldots, \mu_r) \in \mathbf{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f_j = 0_E \quad (1)$.

En appliquant l'endomorphisme u à l'égalité (1) il vient :

$$0_E = u(0_E) = u\left(\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i u(e_i) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j u(f_j) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j e_j$$

or la famille $(e_1, \dots, e_r)$ est libre en tant que base de $\operatorname{Im} u$ donc $\forall j \in [\![1, r]\!] \quad \mu_j = 0$. L'égalité (1) devient alors $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i e_i = 0_E$, or la famille $(e_1, \dots, e_{n-r})$ est une base de $\operatorname{Ker} u$ donc $\forall i \in [\![1, n-r]\!] \quad \lambda_i = 0$.

Finalement $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f_j = 0_E \Longrightarrow \forall (i,j) \in [\![1, n-r]\!] \times [\![1, r]\!] \quad \lambda_i = 0 = \mu_j$.

La famille $(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r)$ est une famille libre de E qui contient n vecteurs or $n = dim(E)$ donc $\boxed{(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r) \text{ est une base de } E.}$

28. La famille $(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r)$ définie dans la question précédente est une base de E alors $\mathcal{B} = (e_{r+1}, \dots, e_{n-r}, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r)$ est aussi une base de E et elle vérifie :
$\forall i \in [\![r+1, n-r]\!] \quad u(e_i) = 0$, $\forall i \in [\![1, r]\!] \quad u(e_i) = 0$ et $u(f_i) = e_i$ alors la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$ est de la forme diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0_{n-2r} & & & \\ & J & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & J \end{pmatrix}$$

où 0_{n-2r} désigne la matrice nulle de $M_{n-2r}(\mathbb{K})$ et où les autres blocs diagonaux égaux à $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont en nombre r.

29. On déduit du résultat précédent que si $u \in N_2$ alors u vérifie l'assertion (ii) donc $u \in \mathcal{D}$ et, comme $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}$, on obtient $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$ or par le résultat de la question 25 on sait que $\mathcal{D} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_2$ donc

$$\boxed{\mathcal{N}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{N}.}$$

Fin du corrigé