

Electromagnétisme dans l'ARQS.

PSI.

March 12, 2025

1 Les équations de Maxwell

1.1 Postulat de Lorentz

Une charge q_1 crée le champ électromagnétique $\{\vec{E}_1(M, t), \vec{B}_1(M, t)\}$ en tout point M de l'espace. Le **postulat de Lorentz** donne la force exercée par :

- q_1 sur une charge q_2 située en M_2 et animée de la vitesse $\vec{v}_2(t)$:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2(\vec{E}_1(M_2, t) + \vec{v}_2(t) \wedge \vec{B}_1(M_2, t))$$

- un ensemble (\mathcal{S}) de charges créant le **champ électromagnétique** $\{\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)\}$.
La force qu'exerce (\mathcal{S}) sur une charge q située en M à t résulte de la somme des forces dues à chaque charge constituant (\mathcal{S}) :

$$\vec{F} = q(\vec{E}(M, t) + \vec{v}(t) \wedge \vec{B}(M, t))$$

- Les charges et les courants sont sources d'un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) . Inversement, Le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) agit sur les sources via la force de Lorentz. Il en résulte que les sources sont fonction du champ électromagnétique lui-même fonction des sources. On a un **système bouclé**.

1.2 Les équations

Entre 1864 et 1865 Maxwell a postulé ces 4 équations pour déterminer le champ électromagnétique en tout point M de l'espace et à tout instant t .

♡ Le champ électromagnétique $\{\vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t)\}$ créé au point M à la date t est relié à ses sources $\{\rho(P, t); \vec{j}(P, t)\}$ situées en P à t par les équations locales de Maxwell :

$$\text{Maxwell-Gauss (MG)} \quad \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Maxwell-Faraday (MF)} \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-flux (M}\Phi\text{)} \quad \text{div}(\vec{B}) = 0$$

$$\text{Maxwell-Ampère (MA)} \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

1.3 Théorème de superposition

Si les sources $\{\rho_1; \vec{j}_1\}$ et $\{\rho_2; \vec{j}_2\}$ créent les champs électromagnétiques respectifs $\{\vec{E}_1(M, t); \vec{B}_1(M, t)\}$ et $\{\vec{E}_2(M, t); \vec{B}_2(M, t)\}$ alors les distributions :

$$\begin{aligned}\rho(P, t) &= \lambda_1 \rho_1(P, t) + \lambda_2 \rho_2(P, t) \\ \text{et } \vec{j}(P, t) &= \lambda_1 \vec{j}_1(P, t) + \lambda_2 \vec{j}_2(P, t) \\ \text{créent le champ électromagnétique } \vec{E}(M, t) &= \lambda_1 \vec{E}_1(M, t) + \lambda_2 \vec{E}_2(M, t) \\ \text{et } \vec{B}(M, t) &= \lambda_1 \vec{B}_1(M, t) + \lambda_2 \vec{B}_2(M, t)\end{aligned}$$

La linéarité des équations de Maxwell entraîne la validité du théorème de superposition.

En effet, tous les opérateurs ($\vec{\text{rot}}$, div et $\frac{\partial}{\partial t}$) sont linéaires.

1.4 Les différents régimes

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont découplés seulement en régime stationnaire (fréquence $f = 0$).

En régime variable ($f \neq 0$), les sources de \vec{E} sont les charges ($\rho = \rho_{\text{lié}} + \rho_{\text{libre}}$) et les variations temporelles de \vec{B} . Les sources de \vec{B} sont les courants $\vec{j} = \rho_{\text{libre}} \vec{v}$ et les variations temporelles de \vec{E} . On appelle vecteur courant de déplacement $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. En régime variable, les sources (courants et charges) rayonnent un champ électromagnétique. Cette **Onde ElectroMagnétique** (OEM) est due au **couplage** entre \vec{E} et \vec{B} c'est-à-dire à (MF) et (MA).

L'ARQS est l'approximation des régimes lentement variables ($0 < f < f_0$).

Si on impose des courants, alors on est dans l'ARQS magnétique $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx \vec{0}$

Si on impose des charges, alors on est dans l'ARQS électrique $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx \vec{0}$

2 Propriétés de symétrie du champ électromagnétique

En régime variable, on étudie les symétries et les invariances de l'ensemble des sources (charges ρ ET courants \vec{j}) pour en déduire celles du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}).

- Une invariance par translation ou par rotation des sources induit la même invariance du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}).
- En un point M d'un plan de symétrie des sources, $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan alors que $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan.
- En un point M d'un plan d'antisymétrie des sources, $\vec{E}(M)$ est orthogonal à ce plan alors que $\vec{B}(M)$ est contenu dans ce plan.

3 L'énergie électromagnétique

3.1 Puissance fournie par le champ EM aux porteurs de charges

Un porteur de charge de type i placé dans le champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$:

$$\begin{aligned} &\text{subit la force de Lorentz } \vec{f}_i = q_i(\vec{E} + \vec{v}_i \wedge \vec{B}) \\ &\vec{f}_i \text{ développe la puissance } p_i = q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Dans le volume mésoscopique $d\tau$ les $n_i d\tau$ porteurs de charges subissent le même champ électromagnétique. La puissance totale développée est :

$$d\mathcal{P}_i = p_i n_i d\tau = n_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E} d\tau$$

La puissance totale développée par tous les types de porteurs de charges dans le volume mésoscopique $d\tau$ est :

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= \sum_{i=1}^N (n_i q_i \vec{v}_i) \cdot \vec{E} d\tau \\ \text{or par définition } \vec{j} &= \sum_{i=1}^N n_i q_i \vec{v}_i \\ \text{d'où } d\mathcal{P} &= \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \end{aligned}$$

♡ La puissance volumique (en W.m^{-3}) fournie par un champ électromagnétique à des porteurs de charges est :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Remarques :

- Dans le cas d'une antenne réceptrice, les charges reçoivent de la puissance de la part du champ (\vec{E}, \vec{B}) d'où $\vec{j} \cdot \vec{E} > 0$.
- Dans le cas d'une antenne émettrice, les charges en mouvement rayonnent de la puissance d'où $\vec{j} \cdot \vec{E} < 0$.
- Un conducteur ohmique est toujours récepteur car $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ d'où $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \frac{j^2}{\gamma} > 0$

3.2 Equation locale de Poynting

$$\begin{aligned}
\text{D'après (MA)} \quad \vec{j} &= \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
\vec{j} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
\text{or } \nabla \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \\
\text{d'où } \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) \\
\text{or (MF)} \quad \vec{j} \cdot \vec{E} &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) \\
-\vec{j} \cdot \vec{E} &= \text{div}\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)
\end{aligned}$$

3.3 Grandeurs énergétiques associées à un champ EM

On définit un $\vec{\mathcal{R}}$.

♡ Par définition, le **vecteur de Poynting** $\vec{\mathcal{R}}$ (en W.m²) est le vecteur densité volumique de courants d'énergie électromagnétique :

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Le flux du vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{R}}$ représente la puissance électromagnétique \mathcal{P}_{em} qui traverse (\mathcal{S}) :

$$\mathcal{P}_{em} = \iint_{(\mathcal{S})} \vec{\mathcal{R}} \cdot d\vec{S}$$

♡ La **densité volumique d'énergie électromagnétique** u_{em} est définie par :

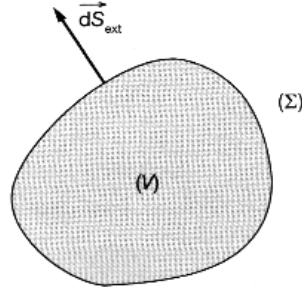
$$u_{em} = \frac{dU_{em}}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = u_{el} + u_m$$

♡ Le **bilan local de puissance électromagnétique** est l'équation locale de Poynting, appelé aussi théorème de Poynting :

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = \text{div}(\vec{\mathcal{R}}) + \frac{\partial u_{em}}{\partial t}$$

3.4 Bilan énergétique sur un volume (\mathcal{V}) fixe

Intégrons l'équation locale de Poynting sur un volume (\mathcal{V}) fixe limité par la surface fermée (Σ) orientée par sa normale sortante :



$$\begin{aligned}
 -\mathcal{P}_{em, champ \rightarrow porteurs} &= - \iiint_{(V)} \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau = \iiint_{(V)} \text{div}(\vec{\mathcal{R}}) \, d\tau + \iiint_{(V)} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \, d\tau \\
 \text{comme } (V) \text{ est fixe } \iiint_{(V)} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \, d\tau &= \frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} u_{em} \, d\tau \right) = \frac{dU_{em}}{dt} \\
 \text{Ostrogradski } \iiint_{(V)} \text{div}(\vec{\mathcal{R}}) \, d\tau &= \oiint_{(\Sigma)} \vec{\mathcal{R}} \cdot d\vec{S}_{ext} = P_{em, (V) \rightarrow ext} \\
 dU_{em} &= -\mathcal{P}_{em, champ \rightarrow porteurs} \, dt - P_{em, (V) \rightarrow ext} \, dt
 \end{aligned}$$

La puissance électromagnétique :

- sortant de (V) est $P_{em, (V) \rightarrow ext}$ échangée avec l'extérieur.
- cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges contenus dans (V) est $\mathcal{P}_{em, champ \rightarrow porteurs}$.

Le bilan d'énergie électromagnétique pendant entre t et $t + dt$ sur le volume (V) fixe exprime que l'augmentation d'énergie U_{em} est due à l'échange d'énergie avec l'extérieur (flux du vecteur de Poynting) et à la création d'énergie par les porteurs de charges.

$$\begin{aligned}
 dU_{em} &= \delta U_{em, e} + \delta U_{em, c} \\
 dU_{em} &= \mathcal{P}_{em, ext \rightarrow (V)} \, dt + \mathcal{P}_{em, porteurs \rightarrow champ} \, dt
 \end{aligned}$$

4 L'ARQS

4.1 Temps de propagation

Les sources du champ électromagnétique $\{\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)\}$ ressenti en M à t sont les charges et les courants $\{\rho(P, t); \vec{j}(P, t)\}$ situés en P . En régime variable, l'état des sources à $(t - \tau)$ détermine le champ électromagnétique en M à t . Le retard τ dû à la propagation vaut $\tau = \frac{PM}{c}$.

En régime stationnaire (pas de dépendance en temps) les retards sont sans effet. En régime variable la situation est complexe puisque les retards sont différents pour les différents points P d'une source.

♡ L'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) est un **régime lentement variable** qui consiste à **négliger les retards de propagation** τ en régime variable devant l'échelle caractéristique $T = \frac{1}{f}$ des variations temporelles des sources $\tau_{max} = \frac{L}{c} \ll T$ soit $L \ll \lambda = cT$ où L désigne la taille du système et λ la longueur d'onde de l'OEM.

$$\begin{aligned} \text{en TP } f &< 10 \text{ MHz} \\ \text{soit } T &> 10^{-7} \text{ s} \\ \text{ARQS si } L &\ll 30 \text{ m} \end{aligned}$$

La taille des circuits étudiés satisfait cette condition.

5 ARQS magnétique

5.1 Définition

Dans le cadre de l'ARQS magnétique les **courants dominant les charges** $\frac{\rho c}{j} \ll 1$

Simplifions l'équation de conservation de la charge $\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$:

$$\frac{|\frac{\partial \rho}{\partial t}|}{\text{div}(\vec{j})} \approx \frac{\frac{\rho}{T}}{\frac{j}{L}} \approx \frac{\rho c}{j} \frac{L}{cT} \ll 1$$

Le terme $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ne peut pas compenser le terme $\text{div}(\vec{j})$. La seule possibilité est donc que $\text{div}(\vec{j}) = 0$. La loi des nœuds est donc valide.

Montrons que le **vecteur densité de courant de déplacement** $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0 \mu_0 |\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}|}{||\text{rot}(\vec{B})||} &\approx \frac{\frac{E}{c^2 T}}{\frac{B}{D}} \approx \frac{E}{B} \frac{D}{c^2 T} \\ \text{or d'après (MF)} \quad \frac{E}{D} &\approx \frac{B}{T} \\ \text{d'où } \frac{\varepsilon_0 \mu_0 |\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}|}{||\text{rot}(\vec{B})||} &\approx \frac{D^2}{c^2 T^2} \ll 1 \end{aligned}$$

Sous quelle forme est l'énergie électromagnétique dans l'ARQS magnétique ?

$$\frac{u_{el}}{u_m} = \frac{\varepsilon_0 \frac{E^2}{2}}{\frac{B^2}{2\mu_0}} \approx \frac{E^2}{c^2 B^2} \ll 1$$

Dans le cadre de l'ARQS magnétique $L \ll \lambda$, l'énergie électromagnétique est essentiellement sous forme magnétique et les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned}
(\text{MG}) \quad \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
(\text{MF}) \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
(\text{M}\Phi) \quad \text{div} \vec{B} &= 0 \\
(\text{MA}) \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &\approx \mu_0 \vec{j}
\end{aligned}$$

5.2 Conséquences

Le théorème d'Ampère est le même en régime stationnaire que dans l'ARQS magnétique. Ainsi les champs \vec{B} suivants sont valables dans l'ARQS magnétique :

- un fil rectiligne infiniment long $\vec{B} = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \vec{u}_\theta$
- un solénoïde : $\vec{B} = n\mu_0 i(t) \vec{u}_z$

Les phénomènes d'**induction électromagnétique** étudiés en 1ère année relèvent de l'**ARQS magnétique**.

5.3 Etude d'un solénoïde

5.3.1 Champ magnétique

Soit un solénoïde d'axe (Oz) , de rayon R comportant n spires par unité de longueur, assez long pour négliger les effets de bord, parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ lentement variable à la fréquence f telle que l'ARQS magnétique est validée : $R \ll \lambda = \frac{c}{f}$. Le champ magnétique s'approxime à celui calculé en régime stationnaire avec le théorème d'Ampère : $\vec{B}(M, t) \approx \vec{B}_0$:

$$\begin{aligned}
&\text{à l'intérieur } \vec{B}(M, t) = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z \\
&\text{à l'extérieur } \vec{B}(M, t) = \vec{0}
\end{aligned}$$

5.3.2 Les équations de Maxwell

Dans le vide, c'est-à-dire en dehors de la source de courant, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned}
(\text{MG}) \quad \text{div} \vec{E} &= 0 \\
(\text{MF}) \quad \text{à l'intérieur } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \left(-n \frac{di}{dt} \vec{u}_z\right) \\
(\text{MF}) \quad \text{à l'extérieur } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= \vec{0} \\
(\text{M}\Phi) \quad \text{div} \vec{B} &= 0 \\
(\text{MA}) \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &\approx \vec{0}
\end{aligned}$$

5.3.3 Calcul du champ électrique

Les variations temporelles de $\vec{B}(M, t)$ induisent un champ électrique $\vec{E}(M, t)$ d'après (MF). Il y a deux façons de calculer $\vec{E}(M, t)$.

1ère façon :

On considère un point $M(r, \theta, z)$ quelconque de l'espace.

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie du solénoïde parcouru par $i(t)$. Donc $\vec{E}(M)$ est orthogonal à ce plan soit $\vec{E}(M) = E\vec{u}_\theta$. Le solénoïde est invariant par translation selon (Oz) et par rotation d'angle θ autour de (Oz) d'où :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_\theta$$

On calcule la circulation de \vec{E} le long de la ligne de champ (\mathcal{L}) de \vec{E} qui passe par M c'est-à-dire le cercle de rayon r et d'axe (Oz) :

$$\oint_{(\mathcal{L})} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(\mathcal{L})} E(r)\vec{u}_\theta \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} rE(r) d\theta = 2\pi rE(r)$$

$$\text{Théorème de Stokes } \oint_{(\mathcal{L})} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S_d)} \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot dS\vec{u}_z$$

$$\text{si M est extérieur } 2\pi rE(r) = -\mu_0 n \frac{di}{dt} 2\pi \int_0^R r dr + \int_R^r \vec{0} \cdot dS\vec{u}_z = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \pi R^2$$

$$\text{si M est intérieur } 2\pi rE(r) = -\mu_0 n \frac{di}{dt} 2\pi \int_0^r r dr = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \pi r^2$$

$$\text{à l'intérieur } \vec{E} = -\frac{\mu_0 n r}{2} \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta$$

$$\text{à l'extérieur } \vec{E} = -\frac{\mu_0 n R^2}{2r} \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta$$

2nde façon :

On remarque que (MF) est analogue à $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ avec $\vec{j} = j\vec{u}_z$ à l'intérieur et $\vec{j} = \vec{0}$ à l'extérieur du cylindre infiniment long de rayon R et d'axe (Oz) . Il y a donc une analogie avec le câble cylindrique parcouru par des courants dans tout son volume. L'application du théorème d'Ampère conduit à :

$$\text{à l'intérieur } \vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta$$

$$\text{à l'extérieur } \vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \vec{u}_\theta$$

\vec{E} est analogue à \vec{B} et j est analogue à $-n \frac{di}{dt}$. D'où :

$$\text{à l'intérieur } \vec{E} = -\frac{\mu_0 n r}{2} \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta$$

$$\text{à l'extérieur } \vec{E} = -\frac{\mu_0 n R^2}{2r} \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta$$

5.3.4 L'équation de Maxwell-Ampère

Examinons (MA) en un point M en dehors des sources de courant :

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}\vec{B} &= \vec{0} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}}(\vec{B}_0 + \vec{B}_1) &= \vec{0} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{0} + \vec{\text{rot}}\vec{B}_1 &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}_1 \approx \vec{B}_0\end{aligned}$$

L'ARQS consiste à négliger devant \vec{B}_0 le champ \vec{B}_1 induit par $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0}$ d'après (MA).

5.3.5 Energie élektromagnétique

Calculons l'énergie magnétique U_m et l'énergie électrique U_e contenue dans le solénoïde :

$$\begin{aligned}U_m &= \iiint_{(\text{solénoïde})} \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(n\mu_0 i)^2}{2\mu_0} \pi R^2 \ell = \frac{1}{2} Li^2 \\ U_{el} &= \iiint_{(\text{solénoïde})} \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \left(-\frac{\mu_0}{2} n \frac{di}{dt} \right)^2 \int_0^R r^2 2\pi r dr \ell = \frac{\epsilon_0 \mu_0^2}{16} n^2 \pi R^4 \ell \left(\frac{di}{dt} \right)^2 \\ \frac{U_{el}}{U_m} &= \frac{R^2}{8c^2} \left(\frac{1}{i} \frac{di}{dt} \right)^2 \approx \frac{R^2}{8c^2} \frac{1}{T^2} = \frac{R^2}{8(cT)^2} = \frac{1}{8} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 \ll 1\end{aligned}$$

Dans l'ARQS magnétique l'énergie électromagnétique est principalement sous forme magnétique.

5.3.6 Bilan d'énergie

Exprimons le vecteur de Poynting sur la face intérieure du solénoïde :

$$\vec{\mathcal{R}}(r = R^-, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{\mu_0 n R}{2} \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta \wedge \frac{\mu_0 n i}{\mu_0} \vec{u}_z = -\frac{\mu_0 n^2 R}{2} i \frac{di}{dt} \vec{u}_r$$

La puissance électromagnétique instantanée reçue par le solénoïde est le flux entrant de $\vec{\mathcal{R}}$ à travers sa surface latérale :

$$\begin{aligned}p(t) &= - \iint_{(\mathcal{S}_{lat})} \vec{\mathcal{R}}(r = R^-, t) \cdot dS \vec{u}_r = \frac{\mu_0 n^2 R}{2} i \frac{di}{dt} 2\pi R \ell \\ p(t) &= - \iint_{(\mathcal{S}_{lat})} \vec{\mathcal{R}}(r = R^-, t) \cdot dS \vec{u}_r = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \\ p(t) &= \frac{dU_m}{dt}\end{aligned}$$

La puissance $p(t)$ rayonnée à l'intérieur du solénoïde fait augmenter l'énergie magnétique $U_m = \frac{1}{2} Li^2$ stockée dans la bobine.

Dans le **vide** et dans l'ARQS magnétique, \vec{B} se calcule avec le théorème d'Ampère comme en RS :

$$\text{Maxwell-Gauss (MG) } \text{div}(\vec{E}) = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday (MF) } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-flux (M}\Phi\text{) } \text{div}(\vec{B}) = 0$$

$$\text{Maxwell-Ampère (MA) } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \approx \vec{0}$$

$$u \approx u_m$$

5.4 Effet de peau

On place un bloc de métal placé à l'intérieur d'un solénoïde parcouru par un courant d'intensité variable $i(t)$ de densité volumique $\vec{j}_0(M, t)$. En un point M des spires du solénoïde $\vec{j}_0(M, t) \neq \vec{0}$ et $\vec{j}_0(M, t) = \vec{0}$ ailleurs.

Le champ magnétique $\vec{B}_0(M, t)$ créé par $\vec{j}_0(M, t)$ est d'après (MA) $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}_0$.

D'après (MF), $\vec{B}_0(M, t)$ variable induit $\vec{E}_1(M, t)$ tel que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}$

Or dans le bloc de métal et dans les spires du solénoïde \vec{E}_1 crée un courant induit de densité volumique $\vec{j}_1 = \gamma \vec{E}_1$ d'après la loi d'Ohm locale.

Les **courants de Foucault** (*eddy currents* en anglais) sont les courants induits dans un conducteur massif.

Dans les spires du solénoïde $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}_0 + \vec{B}_1) = \mu_0(\vec{j}_0 + \vec{j}_1 + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t})$ avec $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}_0$. Le **champ magnétique propre (auto-induit)** vérifie donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_1 = \mu_0(\gamma \vec{E}_1 + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t})$$

Dans l'ARQS magnétique $\frac{\epsilon_0 |\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}|}{||\gamma \vec{E}_1||} \approx \frac{\epsilon_0 f}{\gamma} \ll 1$ dans l'ARQS magnétique.

Dans un conducteur et dans l'ARQS magnétique $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E}$

La loi des nœuds reste valable : $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \text{div}(\vec{j}) = 0$.

D'où $\text{div}(\gamma \vec{E}) = \gamma \text{div}(\vec{E}) = 0$ or $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Dans l'ARQS magnétique, le conducteur reste neutre $\rho = 0$.

La force de Laplace $d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ reste valable.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_1 &\approx \mu_0 \vec{j}_1 = \mu_0 \gamma \vec{E}_1 \\
\text{en odg } \frac{B_1}{L} &\approx \mu_0 \gamma E_1 \\
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_1 &= -\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} \\
\text{en odg } \frac{E_1}{L} &\approx \frac{B_0}{T} = B_0 f \\
\text{d'où } B_1 &\approx B_0 \frac{1}{\pi} \frac{\mu_0 \gamma \omega}{2} L^2 \\
B_1 &\approx B_0 \frac{L^2}{\delta^2}
\end{aligned}$$

L'épaisseur de peau est définie par

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Si la dimension du bloc de métal est $L \ll \delta$ alors le **champ magnétique auto-induit** (propre) B_1 est négligeable devant le **champ magnétique inducteur** B_0 .

Si $L \ll \delta$ n'est pas validée alors dans le métal (neutre $\rho = 0$) :

$$\begin{aligned}
\text{Maxwell-Gauss (MG)} \quad \text{div}(\vec{E}) &= 0 \\
\text{Maxwell-Faraday (MF)} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\text{Maxwell-flux (M}\Phi) \quad \text{div}(\vec{B}) &= 0 \\
\text{Maxwell-Ampère (MA)} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &\approx \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E}
\end{aligned}$$

6 ARQS électrique

6.1 ARQS électrique dans le vide

Soit un condensateur plan dont les armatures, de taille caractéristique L , sont connectées à un générateur de tension lentement variable à la fréquence $f \ll \frac{c}{L}$.

Le champ électrique dans le condensateur (entre les armatures) s'approxime à celui calculé en régime stationnaire avec le théorème de Gauss : $\vec{E}_0 = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{u}_z$

Un champ magnétique $\vec{B}_1(M, t)$ est induit par $\frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \neq \vec{0}$

$$\begin{aligned}
&\text{d'après (MA) } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_1 = \vec{0} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \\
&\text{d'où en odg } B_1 \approx E_0 \frac{L f}{c^2} \\
&\text{l'énergie magnétique } u_m = \frac{B_1^2}{2\mu_0} \approx \frac{L^2 f^2 E_0^2}{c^4 2\mu_0} = \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} \\
&\text{d'après (MF) } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}_0 + \vec{E}_1) = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \\
&\quad \vec{0} + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}_1) = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \\
&\text{d'où en odg } E_1 \approx B_1 L f \\
&\text{dans l'ARQS électrique } E_1 \approx E_0 \frac{L^2}{\lambda^2} \ll E_0 \\
&\text{l'énergie électrique } u_e = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \approx \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2}
\end{aligned}$$

Dans le vide et dans l'ARQS électrique ($L \ll \lambda$), \vec{E} se calcule comme en RS avec le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned}
&\text{Maxwell-Gauss (MG) } \text{div}(\vec{E}) = 0 \\
&\text{Maxwell-Faraday (MF) } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \approx \vec{0} \\
&\text{Maxwell-flux (M}\Phi\text{) } \text{div}(\vec{B}) = 0 \\
&\text{Maxwell-Ampère (MA) } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \approx \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
&\quad u = u_m + u_e \approx u_e
\end{aligned}$$

6.2 Etude d'un condensateur plan

6.2.1 Calcul du champ magnétique induit

On considère un condensateur plan d'épaisseur e dont les armatures sont des disques d'axe (Oz) de rayon $R \gg e$ de sorte qu'on néglige les effets de bord.

L'application du théorème de Gauss donne :

$$\vec{E}_0(M, t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{u}_z = \frac{q(t)}{\pi R^2 \epsilon_0} \vec{u}_z$$

Calculons le champ magnétique induit $\vec{B}_1(M, t)$ en un point M quelconque situé à l'intérieur du solénoïde.

Les sources (les charges ici) sont invariantes par rotation autour de (Oz) et le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie. Donc $\vec{B}_1(M, t)$ est orthogonal à $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ soit $\vec{B}_1(M, t) = B_1(r, z, t) \vec{u}_\theta$.

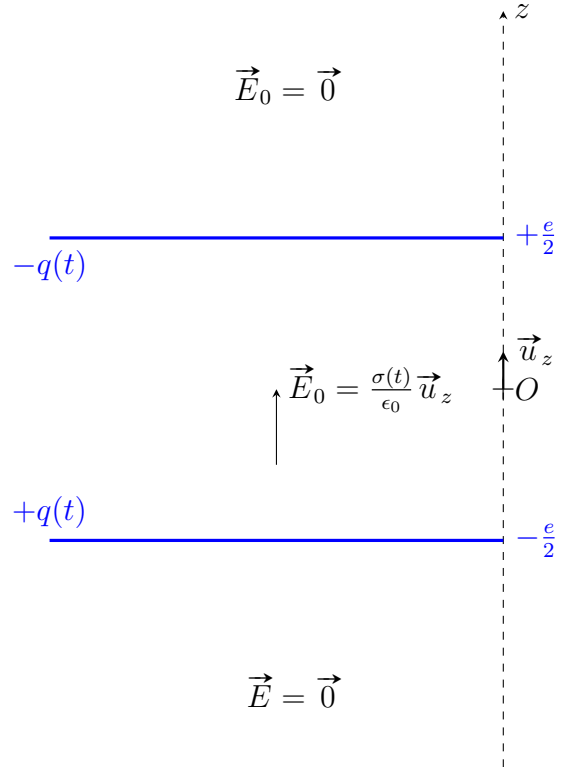
On calcule la circulation de $\vec{B}_1(M, t)$ le long d'une ligne de champ (\mathcal{L}) de \vec{B}_1 :

$$\oint_{(\mathcal{L})} B_1(r, z, t) \vec{u}_\theta \cdot d\ell \vec{u}_\theta = \iint_{(S)} \text{rot} \vec{B}_1 \cdot dS \vec{u}_z$$

$$\text{d'après (MA)} \quad 2\pi r B_1(r, z, t) = \iint_{(S)} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \cdot dS \vec{u}_z$$

$$2\pi r B_1(r, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \frac{q(t)}{\pi R^2 \epsilon_0} \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \dot{q} \frac{r}{R^2} \vec{u}_\theta$$



6.2.2 Bilan d'énergie

$$U_e = \iiint_{\text{condensateur}} \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} \pi R^2 e = \frac{q^2}{2} \left(\frac{e}{\epsilon_0 S} \right) = \frac{q^2}{2C}$$

$$U_m = \iiint_{\text{condensateur}} \frac{B_1^2}{2\mu_0} d\tau = \int_0^R \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \dot{q} \frac{r}{R^2} \right)^2 2\pi r e dr = \frac{\mu_0 \dot{q}^2 e}{4\pi R^4} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\mu_0 \dot{q}^2 e}{16\pi}$$

$$\text{ARQS électrique} \quad \frac{U_m}{U_e} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 R^2}{8} \left(\frac{\dot{q}}{q} \right)^2 \approx \frac{R^2}{T^2 c^2} = \frac{R^2}{T^2 c^2} = \frac{R^2}{\lambda^2} \ll 1$$

La puissance électromagnétique reçue à l'instant t par l'intérieur du condensateur (cylindre d'axe (Oz) , de rayon R et de hauteur e) est le flux entrant du vecteur de Poynting à travers la surface latérale :

$$\begin{aligned}
p(t) &= - \iint_{(S_{lat})} \mathcal{R} \cdot dS \vec{u}_r = - \iint_{(S_{lat})} \left(\frac{\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_1}{\mu_0} \right) \cdot dS \vec{u}_r \\
p(t) &= - \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{q}{\pi R^2 \epsilon_0} \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0}{2\pi} \dot{q} \frac{R}{R^2} \vec{u}_\theta \right) 2\pi R e \vec{u}_r = \frac{q \dot{q} e}{\pi R^2 \epsilon_0} = \frac{q \dot{q}}{C} \\
p(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right) = \frac{dU_e}{dt}
\end{aligned}$$

La puissance $p(t)$ rayonnée à l'intérieur du condensateur fait augmenter l'énergie électrique $U_e = \frac{q^2}{2C}$ stockée dans le condensateur.

7 Lois de l'induction dans l'ARQS magnétique

7.1 Force électromotrice

Considérons l'exemple d'une spire filiforme dont le métal a une conductivité électrique γ . A quelle condition, en régime établi, est-il possible de faire circuler un courant d'intensité $i(t)$ dans la spire ?

Appliquons le TEC à un électron de conduction pendant un tour de spire dans le cadre du modèle classique de Drude :

$$\Delta E_c = -e \oint_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{(c)} \vec{F}_{fr} \cdot d\vec{\ell}$$

Si $\oint_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ alors $\Delta E_c = \oint_{(c)} \vec{F}_{fr} \cdot d\vec{\ell} < 0$. La force de friction $\vec{F}_{fr} = -\frac{m\vec{v}}{\tau}$ est résistante. L'électron perd donc de l'énergie à chaque tour. Le courant ne peut être que transitoire. En régime établi, le courant est nul.

Il est donc nécessaire que $\oint_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$ pour qu'un courant $i(t)$ non nul circule dans la spire en régime établi.

La **force électromotrice** e en V est définie par $e = \oint_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

Le métal qui constitue la spire est un conducteur ohmique de résistance R soumis à un générateur de fem e :

$$e = \oint_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(c)} \frac{\vec{j}}{\gamma} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(c)} \frac{jS}{\gamma S} d\ell = i \oint_{(c)} \frac{\ell}{\gamma S} = i \oint_{(c)} dR = Ri$$

La définition de la fem e permet bien de retrouver la loi de l'électrocinétique $e = Ri$

Le champ électrique n'étant plus à circulation conservative, on peut le décomposer en :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} + \vec{E}_m$$

de sorte que

$$\oint_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 + \oint_{(c)} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = e$$

Sur une portion AB de circuit :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_A - V_B + \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$$

♥ Le **champ électromoteur** à circulation non conservative est responsable de la fem e :

$$\oint_{(C)} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = e$$

On retrouve la loi d'Ohm généralisée :

$$R_{AB}i = V_A - V_B + e$$

7.2 Lois expérimentales de l'induction

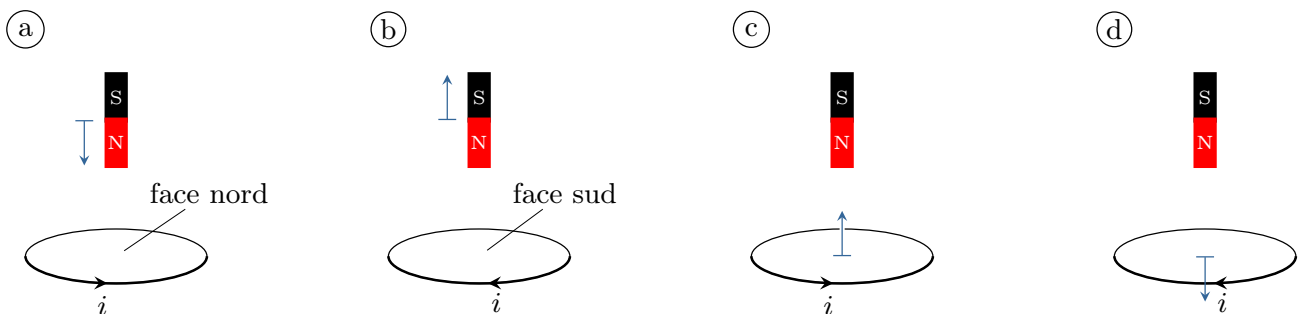
On crée un champ magnétique avec un aimant droit (**inducteur**). On prend une spire (conducteur) non reliée à un générateur.

Expérimentalement, on constate que si on éloigne ou si on rapproche l'aimant de la spire maintenue fixe alors **un courant est induit dans la spire**. Le courant est d'autant plus intense que la vitesse de déplacement de l'aimant est grande. Le sens du courant i induit s'inverse si le rapprochement devient un éloignement.

On appelle **induction de Neumann** (a) et (b) le cas où le **conducteur est fixe dans un champ magnétique variable**.

Inversement, si on éloigne ou si on rapproche la spire de l'aimant maintenu fixe alors on mesure le même courant induit dans la spire pour la même vitesse relative.

On appelle **induction de Lorentz** (c) et (d) le cas où le **conducteur est mobile dans un champ magnétique stationnaire**.



Le courant induit dans la spire crée un champ magnétique auto-induit dont le flux propre tend à s'opposer à l'augmentation (a)/diminution (b) du flux du champ inducteur.

Si le conducteur est en circuit ouvert alors avec un voltmètre on mesure une fem e d'induction.

Si le conducteur est en circuit fermé alors la fem e d'induction génère la circulation d'un courant i induit.

Par convention, la fem e induite est reliée au courant i induit par la **convention générateur**.

8 Induction de Neumann et ses applications

8.1 Loi de Faraday

On démontre la loi intégrale de Faraday à partir de l'équation locale de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{théorème de Stokes} \quad \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \iint_{(S)} \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot dS \vec{n} \\ e &= - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dS \vec{n} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot dS \vec{n}\end{aligned}$$

Le conducteur étant fixe le flux magnétique $\phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot dS \vec{n}$ ne varie que par rapport au temps.

♡ D'après la **loi de Faraday**, une variation temporelle du flux magnétique induit une force électromotrice e telle que :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

♡ Le signe $-$ traduit la **loi de (modération) Lenz** :

la fem e induite tend, par ses conséquences, à s'opposer aux causes qui l'ont produites.

Par **auto-induction**, le courant i induit crée un champ magnétique dont l'effet, conformément à la loi de Lenz, est de s'opposer à la variation du flux magnétique du champ inducteur.

8.2 Chauffage par induction

Soit un solénoïde d'axe (Oz) parcouru par un courant $i(t)$ sinusoïdal. En négligeant les effets de bord, cette bobine crée le champ magnétique $\vec{B}_0(t) = n\mu_0 i(t) \vec{u}_z = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ en posant $B_0 = n\mu_0 I_m$.

A l'intérieur de la bobine, on place un bloc de métal cylindrique, de rayon R , d'axe (Oz) , de longueur ℓ et de conductivité électrique γ .

8.2.1 Analyse physique

La bobine constitue l'**inducteur** car $\frac{d\vec{B}_0}{dt} \neq \vec{0}$. Elle induit un champ électrique \vec{E}_1 à l'intérieur du bloc de métal. D'après la **loi d'Ohm locale** des **courants de Foucault** de densité $\vec{j}_1 = \gamma \vec{E}_1$ apparaissent dans tout le volume du conducteur qui constitue l'**induit**. L'**effet Joule** produit par les courants de Foucault est responsable d'un **échauffement** de l'induit.

8.3 Courants de Foucault induits

On détermine le champ électrique \vec{E}_1 induit puis \vec{j}_1 .

On considère un point $M(r, \theta, z)$ quelconque de l'espace. Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie du solénoïde parcouru par $i(t)$. Donc $\vec{E}(M)$ est orthogonal à ce plan soit $\vec{E}(M) = E \vec{u}_\theta$. Le solénoïde est invariant par translation selon (Oz) et par rotation d'angle θ autour de (Oz) d'où :

$$\vec{E}_1(M) = E_1(r) \vec{u}_\theta$$

On calcule la circulation de \vec{E}_1 le long de la ligne de champ (\mathcal{L}) de \vec{E}_1 qui passe par M c'est-à-dire le cercle de rayon r et d'axe (Oz) :

$$e = \oint_{(\mathcal{L})} \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(\mathcal{L})} E_1(r) \vec{u}_\theta \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} r E_1(r) d\theta = 2\pi r E_1(r)$$

$$\text{Théorème de Stokes } e = \oint_{(\mathcal{L})} \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S_d)} \vec{\text{rot}} \vec{E}_1 \cdot dS \vec{u}_z$$

$$\text{si M est intérieur } 2\pi r E_1(r) = -\mu_0 n \frac{di}{dt} 2\pi \int_0^r r dr = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \pi r^2$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{\mu_0 n r}{2} \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta = n \mu_0 I_m \frac{\omega r}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta = \frac{B_0 \omega r}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

$$\text{loi d'Ohm locale } \vec{j}_1(r, t) = \frac{\gamma B_0 \omega r}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

$$\text{loi de Joule locale } p_v = \vec{j}_1 \cdot \vec{E}_1 = \frac{j_1^2}{\gamma}$$

La puissance électromagnétique totale induite dans le métal est dissipée sous forme d'énergie thermique par effet Joule :

$$\mathcal{P}_J = \iiint_{(V)} \langle p_v \rangle_t d\tau = \int_0^R \frac{\langle j_1^2(r, t) \rangle_t}{\gamma} 2\pi r \ell dr = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 2\pi \ell}{4} \langle \sin^2(\omega t) \rangle_t \int_0^R r^3 dr$$

$$\langle \sin^2(\omega t) \rangle_t = \frac{1}{2}$$

Ce chauffage par induction produit la puissance thermique :

$$\boxed{\mathcal{P}_J = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 R^4 \pi \ell}{8}}$$

Les **plaques à induction** fonctionnent sur ce principe. L'**inducteur** est un **bobinage** qui crée le champ magnétique $\vec{B}_0(t)$. L'**induit** est le **fond de la casserole métallique** posé sur la plaque.

Remarque :

Dans ce calcul, on a négligé le champ magnétique propre \vec{B}_1 (auto-induit par les courants de Foucault) devant le champ magnétique inducteur \vec{B}_0 . En effet, (MF) s'écrit $\vec{\text{rot}} \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ où $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$ est le champ total. Cette approximation est valable si $R \ll \delta$ où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_0 \omega}}$ est l'épaisseur de peau.

A $f = 50 \text{ Hz}$ (fréquence du secteur) pour un métal $\delta = \sqrt{\frac{2}{10^7 \times 4\pi 10^{-7} \times 2\pi 50}} \approx 2 \text{ cm}$. Cette fréquence est assez basse pour que $R > \delta$ et donc \vec{B}_1 n'est pas négligeable.

8.4 Feuilletage d'un conducteur

Si le chauffage n'est pas le but, alors la puissance $\mathcal{P}_J(\propto R^4)$ constitue une perte qu'il faut chercher à minimiser. C'est le cas dans un transformateur où le matériau ferromagnétique utilisé pour canaliser les lignes de champ est conducteur.

On remarque que \mathcal{P}_J est proportionnelle à la section droite $S_0^2 = (\pi R^2)^2$ du conducteur.

On divise le cylindre métallique en N cylindres identiques de longueur ℓ et on intercale des feuilles isolantes entre chaque cylindre.

La section droite de chaque petit barreau est $S' = \frac{S_0}{N}$ c'est-à-dire de rayon R' tel que $\pi R'^2 = \frac{\pi R^2}{N}$. La puissance totale dissipée par les N barreaux vaut $\mathcal{P}'_J \propto NR'^4 = \frac{NR^4}{N^2} = \frac{R^4}{N}$

Le **feuilletage** est une technique qui consiste à diviser le bloc métallique en N **blocs séparés par des feuilles d'isolant**. La puissance perdue par effet Joule est ainsi divisée par N .

8.5 Calcul du champ magnétique propre

Les courants de Foucault de densité \vec{j}_1 dans l'induit métallique génèrent un champ magnétique propre \vec{B}_1 . A quelle condition le champ magnétique propre \vec{B}_1 créé par les courants de Foucault est-il bien négligeable devant le champ magnétique inducteur \vec{B}_0 ?

Une couronne cylindrique comprise entre r' et $r' + dr'$ parcourue par des courants de Foucault orthoradiaux de densité $\vec{j}_1(r', t)\vec{u}_\theta$ est équivalente à un solénoïde de rayon r' et de longueur ℓ infinie (on néglige les effets de bord).

A l'extérieur de ce solénoïde, $dB_1(r > r', t) = 0$. A l'extérieur de l'induit métallique c'est-à-dire à l'extérieur de tous ces solénoïdes (en un point M du vide) $\vec{B}_1(r > R) = \vec{0}$

A l'intérieur de l'induit en M repéré par $r \leq R$, $\vec{B}_1(r, t)$ est la somme des champs créés par les solénoïdes de rayon $r' > r$ de sorte que M soit à l'intérieur de ces bobines. On calcule $\vec{B}_1(r, t) = B_1(r, t)\vec{u}_z$ avec le théorème d'Ampère appliqué sur un contour rectangulaire ABCD situé dans un plan méridien (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) et tel que $AB = CD = \ell$ parallèle à \vec{u}_z :

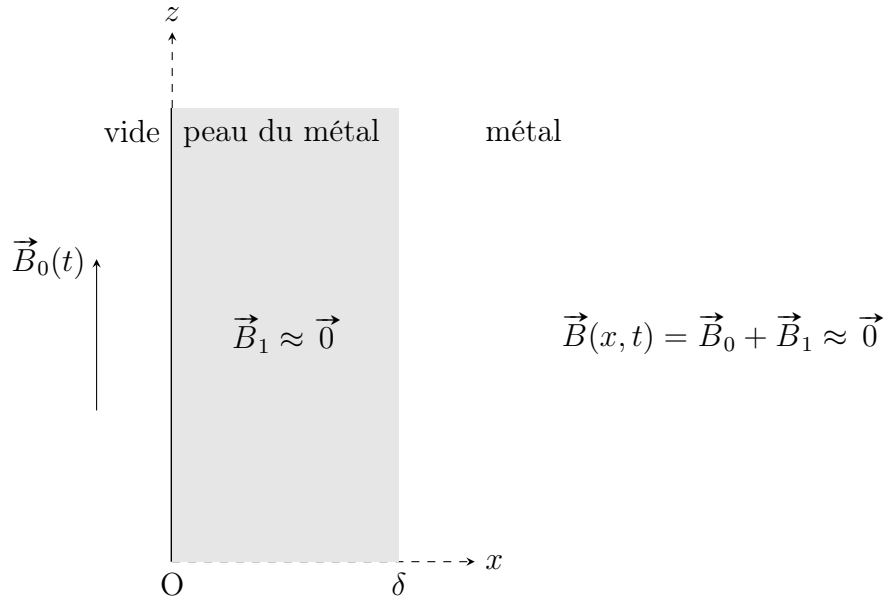
$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 I_{\text{enlacé}} = \mu_0 \int_r^R dI_{\text{enlacé}} \mu_0 \int_r^R j_1(r', t) l dr' \\ l B_1(r, t) &= \mu_0 \ell \frac{\gamma B_0 \omega}{2} \sin(\omega t) \int_r^R r' dr' \\ \vec{B}_1(r, t) &= \mu_0 \frac{\gamma B_0 \omega}{4} \sin(\omega t) (R^2 - r^2) \vec{u}_z \\ \text{sur l'axe } (Oz) \vec{B}_1(r = 0, t) &= B_0 \frac{\mu_0 \gamma \omega}{2} \frac{R^2}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_z = B_0 \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \frac{\sin(\omega t)}{2} \vec{u}_z \end{aligned}$$

Le champ propre \vec{B}_1 auto-induit par les courants de Foucault est négligeable devant le champ inducteur \vec{B}_0 si $R \ll \delta$ où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_0 \omega}}$ représente l'épaisseur de peau du conducteur métallique.

8.6 Epaisseur de peau dans un conducteur semi-infini

8.6.1 Caractère diffusif de l'effet de peau

Considérons un bloc de métal parallélépipédique dont les trois dimensions sont très grandes devant l'épaisseur de peau δ . On le place à l'intérieur d'une bobine qui crée le champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ en l'absence du métal. Le bloc est invariant par translation selon (Oz) et (Oy) . On note $\ell > \delta$ sa dimension selon (Ox) .



Dans l'ARQS magnétique, les équations de Maxwell dans le métal (neutre $\rho = 0$) s'écrivent :

$$(MG) \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$(MF) \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(M\Phi) \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$(MA) \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

(MF) et (MA) couplent \vec{E} et \vec{B} . On les découple en appliquant la formule :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{B})) - \vec{\Delta} \vec{B} \\ \mu_0 \gamma \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= 0 - \vec{\Delta} \vec{B} \end{aligned}$$

On reconnaît une **équation de diffusion** :

$$\boxed{\vec{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

En tenant compte de l'invariance du bloc métallique par translation selon (Oz) et (Oy) , on a

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On impose un champ \vec{B}_0 sinusoïdal de pulsation ω . On cherche donc une solution en régime sinusoïdal forcé de la forme $\vec{B}(x, t) = \vec{b}(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$. L'équation de diffusion étant linéaire, on résout en complexe :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} &= \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\text{avec } \vec{B} &= \vec{b}(x) \exp(i\omega t) \\
\frac{d^2 \vec{b}}{dx^2} &= i\mu_0 \gamma \omega \vec{b} = i \frac{2}{\delta^2} \vec{b} \\
\text{(E.C) } r^2 &= i \frac{2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta^2} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 \\
r &= \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm \frac{1}{\delta}(1+i) \\
\vec{b}(x) &= \vec{\lambda}_+ \exp\left(\frac{x}{\delta}(1+i)\right) + \vec{\lambda}_- \exp\left(-\frac{x}{\delta}(1+i)\right) \\
\vec{B}(x, t) &= \vec{\lambda}_+ \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(i\omega t + \frac{ix}{\delta}\right) + \vec{\lambda}_- \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(i\omega t - \frac{ix}{\delta}\right)
\end{aligned}$$

continuité en $x = 0$

Si $x \rightarrow \infty$ c'est-à-dire si $x \gg \delta$ alors le champ ne doit pas diverger d'où $\vec{\lambda}_+ = \vec{0}$
D'après la relation de passage à l'interface vide-métal

$$\vec{B}(x = 0^+, t) - B_0 \vec{u}_z = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x$$

Absence de courant surfacique soit $\vec{j}_s = \vec{0}$. D'où la continuité du champ à l'interface vide/métal en $x = 0$ d'où :

$$\vec{B}(x = 0, t) = \vec{\lambda}_- \exp(i\omega t) = B_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_z$$

Les courants de Foucault $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ induits dans le métal (par $\vec{B}_0(t)$) créent le champ propre \vec{B}_1 négligeable dans la peau du métal mais pas au-delà.

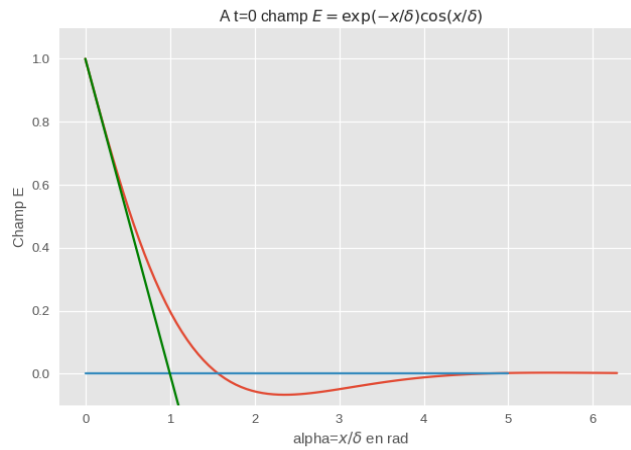
$$\boxed{\vec{B} = B_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \vec{u}_z}$$

Le problème est analogue aux ondes thermiques qui se propagent dans le sol dues à des variations de la température au niveau du sol.

On déduit le champ électrique dans le métal de (MA) :

$$\begin{aligned}
\mu_0 \gamma \vec{E} &= \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = -\frac{dB}{dx} \vec{u}_y \\
\vec{E} &= \frac{(1+i)}{\delta} \frac{B_0}{\mu_0 \gamma} \exp\left(i\omega t - i\frac{x}{\delta}\right) \vec{u}_y = \frac{B_0}{\mu_0 \gamma \delta} \exp\left(i\omega t - i\frac{x}{\delta} + i\frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sqrt{2}B_0}{\mu_0 \gamma \delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y}$$



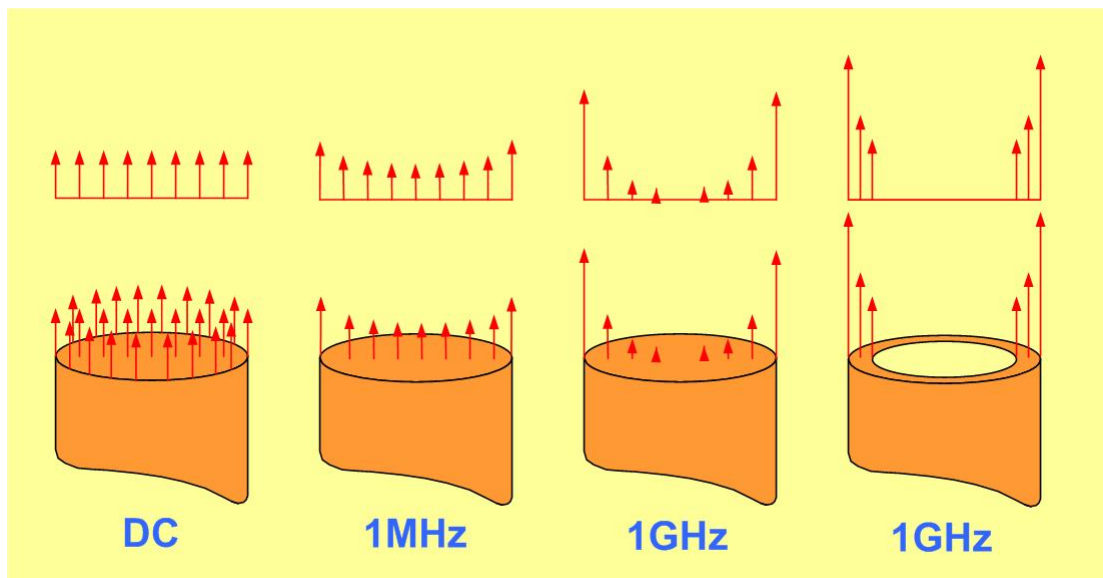
♡ les champs magnétiques et électriques dans le métal sont des **ondes évanescentes**, c'est-à-dire des OPPH qui se propagent dans le sens des x croissants et dont l'amplitude décroît (dans le sens de propagation) sur la **l'épaisseur de peau**

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma\mu_0\omega}}$$

. Les courants $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ ne circulent que dans la peau.

L'**effet de peau** est le **phénomène diffusif** par lequel une OEM ne pénètre dans un conducteur ohmique qu'au voisinage de sa surface c'est-à-dire dans la peau. L'épaisseur de peau représente l'**échelle de la propagation**.

♡ Pour le cuivre à 50 Hz, $\delta \approx 1$ cm En TP, on utilise des fils électriques en cuivre d'épaisseur de l'ordre du mm ($\ll \delta$) et donc il n'y a pas d'effet de peau.



En régime continu (DC), la fréquence est nulle, $\delta \rightarrow +\infty$ donc $\exp(-\frac{x}{\delta}) \rightarrow 1$. Absence d'effet de peau : l'OEM occupe tout le volume du conducteur car il n'y a pas d'induction (le champ magnétique propre est nul).

8.6.2 Cas du conducteur parfait

Le **conducteur parfait** est le cas limite pour lequel les OEM ne pénètrent pas :

$$\delta \rightarrow 0 \quad \text{avec } \omega \neq 0 \text{ d'où } \gamma \rightarrow \infty$$

$$\vec{E}_{int} = \vec{0} \quad \text{et } \vec{B}_{int} = \vec{0}$$

Les courants \vec{j} et les charges ρ ne peuvent être que surfaciques.

8.6.3 Limitation de l'effet de peau

L'effet de peau est en général nuisible car il augmente la résistance et donc les pertes par effet Joule en diminuant la section S traversée par le courant ($R = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S}$).

Les méthodes pour diminuer l'effet de peau sont les suivantes :

- diviser le conducteur en plusieurs conducteurs associés en parallèle et isolés entre eux, chaque "brin" ayant un rayon inférieur à δ .
- plaquer le conducteur avec de l'argent (métal qui possède la plus grande conductivité). La composante continue du courant circule dans tout le volume et la composante alternative HF ne circule que dans la pellicule d'argent.
- adopter une géométrie tubulaire : l'épaisseur du tube creux est de l'ordre de δ .

9 Induction de Lorentz

On étudie le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire (créé par un aimant fixe). On repère la position du circuit par x dans le référentiel du laboratoire et sa vitesse est donc $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

9.1 Loi de Faraday

On démontre la loi intégrale de Faraday à partir de l'équation locale de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

théorème de Stokes $\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot dS \vec{n}$

$$e = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dS \vec{n} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot dS \vec{n}$$

dérivée composée $e = - \frac{d\phi(x(t))}{dt} = - \frac{dx}{dt} \frac{d\phi}{dx} = -v f(x)$

La fem e et donc le courant induit i ainsi que la force de Laplace $\vec{F}_L = \oint i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ dépendent de la vitesse v du circuit. La **force de Laplace est une force de freinage électromagnétique** de la forme $\vec{F}_L = -\lambda(x) \vec{v}$ (frottement fluide avec $\lambda(x) > 0$) qui s'oppose à $\frac{d\phi}{dt}$ d'après la loi de modération de Lenz.

9.2 Méthode

1. Analyse physique du problème
2. Orienter le courant c'est-à-dire choisir un sens positif de circulation de i dans le circuit.
3. D'après la règle de la main droite la surface du circuit est orientée par \vec{n} .
4. Exprimer le flux magnétique $\phi_c(x)$ coupé par le circuit dans son mouvement. Le flux propre $\phi_p = Li$ est le flux du champ magnétique propre (auto-induction) créé par le courant induit i . Le flux total est $\phi = \phi_c(x) + \phi_p$. Négliger l'auto-inductance L revient à négliger le champ propre.
5. Appliquer la loi de Faraday pour exprimer la fem induite e en fonction de la vitesse $v(x)$ du conducteur.
6. Réaliser le schéma électrique équivalent en adoptant la convention générateur pour représenter e et i . La loi des mailles donne l'équation électrique.
7. Réaliser le bilan des actions mécaniques sur le système mécanique mobile. Le TCI ou le TMC donne l'équation mécanique. La force de Laplace agit comme une force de freinage conformément à la loi de Lenz.

9.3 Cadre qui chute dans un champ magnétique localisé

Un cadre conducteur, constitué de 4 segments de longueur a , tombe dans le plan du schéma sous l'effet de la gravité.

Sa résistance électrique est notée R et son autoinductance L .

L'espace est divisé en deux régions :

- pour $x < 0$, il n'y a pas de champ magnétique ;
- pour $x > 0$, il y a un champ magnétique uniforme, stationnaire et orthogonal au plan du schéma.

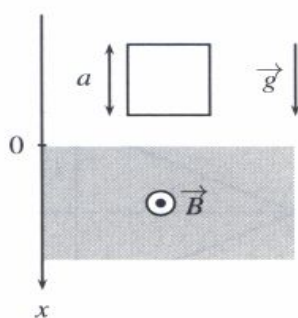


Figure 1: Chute d'un cadre.

Etablir les équations différentielles régissant la vitesse $v(t)$ du cadre dans les 3 régions :

- le cadre est entièrement dans la région $\vec{B} = \vec{0}$;
- le cadre est à cheval sur les régions où $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{B} \neq \vec{0}$.
- le cadre est entièrement dans la région où $\vec{B} \neq \vec{0}$.

9.4 Equilibre d'une tige

Une tige métallique OA de masse m , de résistance R et de longueur a oscille sans frottement (liaison pivot parfaite) autour d'un axe fixe (Oz) , perpendiculaire au plan de la figure.

Le moment d'inertie de la tige autour de (Oz) est $J = \frac{1}{3}ma^2$.

La tige est en contact en A avec un rail métallique formant ainsi un circuit électrique dont le seul élément résistant est la tige OA .

Elle est placée dans un champ magnétique uniforme $B\vec{e}_z$ normal au plan du système.

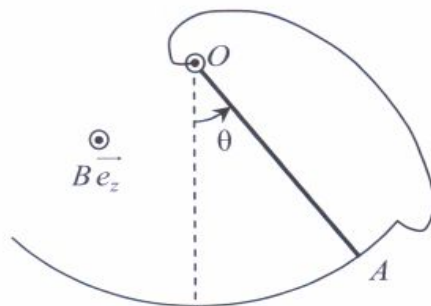


Figure 2: Equilibre d'une tige.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ avec la verticale.
2. On se limite à de petites oscillations autour de la position d'équilibre. Linéariser l'équation différentielle précédente.

Déterminer la valeur minimale B_{min} de B pour la tige atteigne sa position d'équilibre sans oscillation.

3. Ecrire sans calcul l'expression du taux de variation de l'énergie mécanique du pendule $\frac{dE_m}{dt}$ en fonction de l'intensité $i(t)$ qui circule dans la tige.

Retrouver la relation précédente à partir des deux équations électromécaniques couplées utilisées à la 1ère question.

9.5 Rails de Laplace en pente

On reprend la situation des rails de Laplace, mais au lieu d'être horizontaux, ils font un angle α avec l'horizontale.

Le champ magnétique est uniforme et stationnaire et dirigé orthogonalement au rail.

On prendra $B = 150 \text{ mT}$, $m = 8,0 \text{ g}$, $\ell = 12 \text{ cm}$ (masse et longueur du barreau mobile), $\alpha = 30^\circ$ et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. On néglige les frottements.

1. Faire un schéma en précisant le sens du courant pour que la force permette au barreau mobile de monter le long des rails.
2. Calculer la valeur de i pour que le barreau monte à vitesse constante (on imagine qu'il a une vitesse initiale...)
3. Calculer la puissance des forces de Laplace sur le barreau s'il met $0,5 \text{ s}$ pour augmenter son altitude de 10 cm .

9.6 Interaction entre deux tiges

Deux tiges \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 identiques, de masse m , chacune de résistance électrique $\frac{R}{2}$, sont mobiles sans frottement sur deux rails parallèles horizontaux espacés d'une distance a .

La résistance électrique des rails est négligeable devant R ; l'inductance propre du circuit est négligée.

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{e}_z$, et un champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$.

Initialement \mathcal{T}_2 est immobile et \mathcal{T}_1 se déplace vers \mathcal{T}_2 avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$.

Les deux tiges restent parallèles à \vec{u}_y lors de leur mouvement.

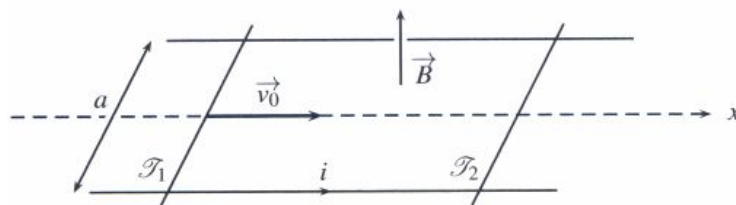


Figure 3: Deux tiges en interaction.

1. Expliquer sans calcul pourquoi la tige \mathcal{T}_1 ralentit alors que la tige \mathcal{T}_2 se met en mouvement.
2. Etablir une équation électrique reliant $i(t)$, intensité du courant dans le circuit, à $v_1(t)$ et $v_2(t)$. On note $\vec{v}_1 = v_1(t)\vec{u}_x$ et $\vec{v}_2 = v_2(t)\vec{u}_x$ les vitesses des tiges \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 .
3. Etablir deux équations mécaniques.
4. En déduire un système d'équations différentielles couplées sur $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

Pour découpler les équations différentielles précédentes, on introduit la fonction somme $\sigma(t)$ et la fonction différence $\delta(t)$ définies par :

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= v_1(t) + v_2(t) \\ \delta(t) &= v_1(t) - v_2(t)\end{aligned}$$

(a) Montrer que :

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt} &= 0 \\ \frac{d\delta}{dt} + \frac{\delta}{\tau} &= 0\end{aligned}$$

Déterminer l'expression de τ .

(b) Résoudre pour déterminer les solutions $\sigma(t)$ et $\delta(t)$.

-
- (c) En déduire $v_1(t)$ et $v_2(t)$.
- (d) Représenter sur un même schéma l'allure des graphes de $v_1(t)$ et $v_2(t)$.
5. Calculer l'intensité du courant $i(t)$ qui circule dans les deux tiges.
6. Calculer la charge totale Q qui circule entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$.
7. Déduire de $i(t)$ l'énergie \mathcal{E}_J dissipée par effet Joule entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$.
8. Calculer la variation $\Delta\mathcal{E}_m$ d'énergie mécanique du système entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$. Commenter.

10 Inductance d'un circuit

10.1 Inductance propre

♡ Le flux propre ϕ_p est le flux de \vec{B} à travers le circuit qui crée lui-même ce champ. Il est proportionnel au champ \vec{B} , lui-même proportionnel au courant i (qui peut dépendre du temps). L'**inductance propre** ou **autoinductance** L (en H) est le facteur de proportionnalité positif déterminé uniquement par la géométrie du circuit :

$$\begin{aligned}\phi_p &= Li \\ \text{avec } [L] &= [\mu_0].L \\ \text{d'où } [\mu_0] &= \text{H.m}^{-1}\end{aligned}$$

En effet, d'après le théorème d'Ampère :

$$\begin{aligned}[B] &= \frac{[\mu_0].[i]}{L} \\ [\phi_p] &= [B].L^2 = [L].[i] \\ [L].[i] &= [\mu_0].[i].L\end{aligned}$$

10.2 Inductance mutuelle

10.2.1 Définition

Considérons deux circuits (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) parcourus respectivement par les courants i_1 et i_2 .

L'orientation des courants i_1 et i_2 détermine celle des surfaces des circuits (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) .

Le flux noté $\phi_{1 \rightarrow 2}$ de \vec{B}_1 créé par (\mathcal{C}_1) à travers (\mathcal{C}_2) est proportionnel à B_1 et donc à i_1 . On définit l'inductance mutuelle M par :

$$\begin{aligned}\phi_{1 \rightarrow 2} &= M_{12}i_1 \\ \text{de même } \phi_{2 \rightarrow 1} &= M_{21}i_2 \\ \text{avec } M_{12} &= M_{21} = M\end{aligned}$$

Le signe de l'inductance mutuelle M (en H) dépend de l'orientation relative des deux circuits. En revanche l'inductance propre L est toujours positive. La valeur absolue de M dépend de la géométrie de l'ensemble.

Exprimons les flux magnétique totaux à travers chaque circuit :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_{p1} + \phi_{2 \rightarrow 1} = L_1i_1 + Mi_2 \\ \phi_2 &= \phi_{p2} + \phi_{1 \rightarrow 2} = L_2i_2 + Mi_1\end{aligned}$$

10.2.2 Exemple

Soit le circuit (\mathcal{C}_1) constitué d'un fil rectiligne infiniment long confondu avec l'axe (Oz) et parcouru par le courant d'intensité i_1 positif dans le sens de (Oz) .

Soit le circuit (\mathcal{C}_2) constitué d'un tore d'axe (Oz) , de rayon intérieur R de section carrée de côté a et parcouru par le courant d'intensité i_2 .

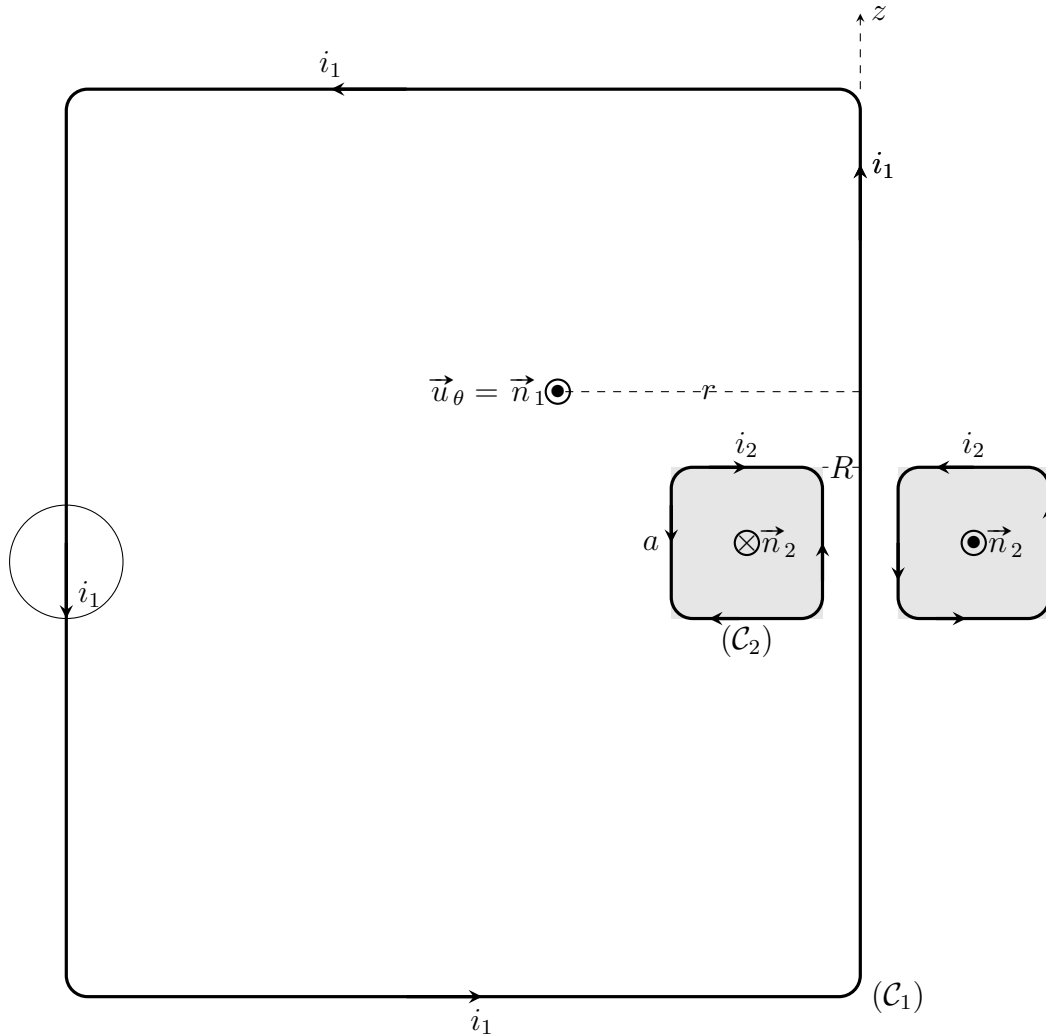
On a montré que le fil crée $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

On a montré que le tore crée $\vec{B}_2 = \vec{0}$ à l'extérieur et $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 N i_2}{2\pi r} \vec{n}_2$ à l'intérieur du tore. On a pris le sens de rotation de i_2 lié à $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1 = -\vec{u}_\theta$ par la règle de la main droite.

Le flux de \vec{B}_1 à travers les N spires du tore vaut avec $dS_2 = dr dz$:

$$\begin{aligned}\phi_{1 \rightarrow 2} &= N \int_{(1 \text{ spire})} \vec{B}_1 \cdot dS_2 \vec{n}_2 \\ \phi_{1 \rightarrow 2} &= -N \int_{(1 \text{ spire})} \vec{B}_1 \cdot dS_2 \vec{u}_\theta \\ \phi_{1 \rightarrow 2} &= -N \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dz \\ \phi_{1 \rightarrow 2} &= -\frac{N \mu_0 i_1}{2\pi} [\ln(r)]_R^{R+a} [z]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \\ \phi_{1 \rightarrow 2} &= -i_1 \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) = M i_1 \\ M &= -\frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)\end{aligned}$$

M est proportionnel au nombre N de spires.



On peut aussi calculer M à partir de :

$$\begin{aligned}
\phi_{2 \rightarrow 1} &= \int_{(C_1)} \vec{B}_2 \cdot dS_1 \vec{n}_1 \\
\phi_{2 \rightarrow 1} &= - \int_{(C_2)} \vec{B}_{2int} \cdot dS_2 \vec{n}_2 \\
\phi_{2 \rightarrow 1} &= - \frac{\mu_0 N i_2}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dz \\
\phi_{2 \rightarrow 1} &= - \frac{N \mu_0 i_2}{2\pi} [\ln(r)]_R^{R+a} [z]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \\
\phi_{2 \rightarrow 1} &= -i_2 \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) = M i_2 \\
M &= - \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)
\end{aligned}$$

11 Energie magnétique d'un ensemble de circuits

Pour un seul circuit le flux magnétique total ϕ est égal au flux propre $\phi_p = Li$ et l'énergie magnétique vaut $\mathcal{U}_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \phi i$

En général, pour n circuits $\mathcal{U}_m = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \phi_k i_k$. Considérons l'exemple de $n = 2$ circuits :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \phi_{p1} + \phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 i_1 + M i_2 \\
\phi_2 &= \phi_{p2} + \phi_{1 \rightarrow 2} = L_2 i_2 + M i_1 \\
\text{or } \mathcal{U}_m &= \frac{1}{2} \phi_1 i_1 + \frac{1}{2} \phi_2 i_2
\end{aligned}$$

L'énergie magnétique totale de deux circuits couplés est $\mathcal{U}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$

Or l'énergie magnétique totale vaut :

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_m &= \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau \geq 0 \\
\text{avec le champ total } \vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\
\text{d'où } \mathcal{U}_m &= i_2^2 \left[\frac{1}{2} L_1 \left(\frac{i_1}{i_2} \right)^2 + M \frac{i_1}{i_2} + \frac{1}{2} L_2 \right] \geq 0 \forall \left(\frac{i_1}{i_2} \right) \\
\text{le discriminant est } \Delta &= M^2 - L_1 L_2 \leq 0 \\
\text{d'où } |M| &\leq \sqrt{L_1 L_2}
\end{aligned}$$

Si $M = 0$ alors les deux circuits ne sont pas couplés.

Enrouler les bobines sur une **tore ferromagnétique** permet de **canaliser les lignes de champ magnétique** et ainsi de réaliser un **couplage parfait** $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$.

Sans le tore ferromagnétique, c'est-à-dire dans l'air, le couplage entre les deux bobines est médiocre. En effet, ce n'est pas le même flux qui traverse chaque spire car les pertes sont importantes.

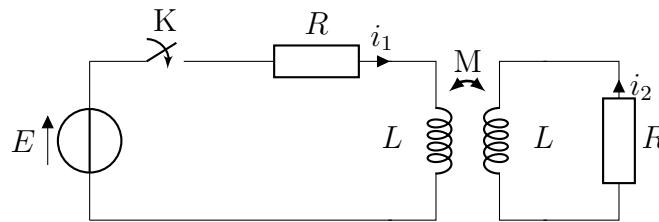
Avec le tore ferromagnétique on montre (par application du théorème d'Ampère) que le champ magnétique B et donc le flux $\phi = BS$ à travers une spire est proportionnel à $N_1 i_1 + N_2 i_2$:

$$\begin{aligned}\phi &= \lambda(N_1 i_1 + N_2 i_2) \\ \text{au primaire } \phi_1 &= N_1 \phi = L_1 i_1 + M i_2 = \lambda(N_1^2 i_1 + N_1 N_2 i_2) \\ \text{au secondaire } \phi_2 &= N_2 \phi = L_2 i_2 + M i_1 = \lambda(N_2 N_1 i_1 + N_2^2 i_2) \\ \text{d'où } L_1 \frac{i_1}{i_2} + M &= \lambda N_1 N_2 + \lambda N_1^2 \frac{i_1}{i_2} \\ \text{et } L_2 \frac{i_2}{i_1} + M &= \lambda N_1 N_2 + \lambda N_2^2 \frac{i_2}{i_1} \\ \text{d'où } L_1 &= \lambda N_1^2 \\ L_2 &= \lambda N_2^2 \\ M &= \lambda N_1 N_2\end{aligned}$$

On retrouve la condition de couplage parfait $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$

11.1 Couplage par mutuelle

On considère deux bobines identiques de résistance R et d'auto-inductance L . On soumet l'une à un échelon de tension de continue E en fermant l'interrupteur K à l'instant $t = 0$. Les deux bobines sont couplées par mutuelle $M > 0$.



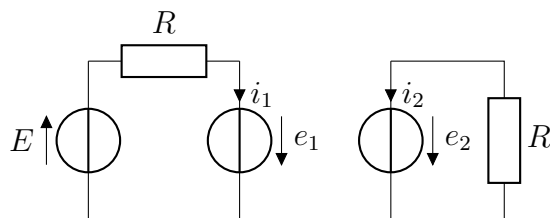
Etablissons les lois $i_1(t)$ et $i_2(t)$ des courants qui s'établissent dans les bobines.

11.2 Cas du couplage non parfait $M < L$

D'après la loi de Faraday :

$$\begin{aligned}e_1 &= -\frac{d\phi_1}{dt} \\ \text{avec } \phi_1 &= L i_1 + M i_2 \\ \text{d'où } e_1 &= -\left(L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}\right) \\ e_2 &= -\frac{d\phi_2}{dt} \\ \text{avec } \phi_2 &= L i_2 + M i_1 \\ \text{d'où } e_2 &= -\left(L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}\right)\end{aligned}$$

Le circuit électrique équivalent est le suivant :



D'après la loi des mailles :

$$E = Ri_1 - e_1 = Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$0 = Ri_2 - e_2 = Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

On pose $S(t) = i_1(t) + i_2(t)$ et $D(t) = i_1(t) - i_2(t)$

$$E = (L + M)\dot{S} + RS$$

$$E = (L - M)\dot{D} + RD$$

On pose $\tau_+ = \frac{L+M}{R}$ et $\tau_- = \frac{L-M}{R} > \tau_+$.

L'énergie magnétique totale stockée dans les bobines est :

$$U_m = \frac{1}{2}\phi_1 i_1 + \frac{1}{2}\phi_2 i_2$$

$$U_m = \frac{1}{2}Li_1^2 + \frac{1}{2}Li_2^2 + Mi_1 i_2$$

L'énergie $U_m(t)$ est continue à $t = 0$ d'où $i_1(t)$ et $i_2(t)$ également. D'où $i_1(t = 0) = 0$ et $i_2(t = 0) = 0$.

$$S(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_+}\right) \right)$$

$$D(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_-}\right) \right)$$

$$i_1(t) = \frac{S(t) + D(t)}{2} = \frac{E}{2R} \left(2 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_+}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_-}\right) \right)$$

$$i_2(t) = \frac{S(t) - D(t)}{2} = \frac{E}{2R} \left(-\exp\left(-\frac{t}{\tau_+}\right) + \exp\left(-\frac{t}{\tau_-}\right) \right)$$

Comme $\tau_- > \tau_+$ le terme $\exp\left(-\frac{t}{\tau_-}\right)$ décroît plus vite que $\exp\left(-\frac{t}{\tau_+}\right)$, d'où :

$$i_1(t) \approx \frac{E}{2R} \left(2 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_+}\right) \right)$$

$$i_2(t) \approx \frac{E}{2R} \left(-\exp\left(-\frac{t}{\tau_+}\right) + \exp\left(-\frac{t}{\tau_-}\right) \right)$$

Le graphe de $i_2(t)$ présente un minimum pour $t_0 = \frac{L^2 - M^2}{2MR} \ln\left(\frac{L+M}{L-M}\right)$ tel que $\frac{di_2}{dt}(t = t_0) = 0$

11.3 Cas du couplage non parfait $M = L$

$$U_m = \frac{L}{2}(i_1^2 + i_2^2 + i_1 i_2) = \frac{L}{2}(i_1 + i_2)^2 = \frac{L}{2}S^2$$

L'énergie $U_m(t)$ est continue à $t = 0$ d'où $S(t)$ également. Les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ ne sont plus continus à $t = 0$! L'instant t_0 n'est plus défini.

$$E = 2L\dot{S} + RS$$

$$E = RD$$

$$S(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \right)$$

$$D(t) = \frac{E}{R} = cste$$

$$i_1(t) = \frac{S(t) + D(t)}{2} = \frac{E}{2R} \left(2 - \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \right)$$

$$i_2(t) = \frac{S(t) - D(t)}{2} = -\frac{E}{2R} \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right)$$