# Equations de Maxwell.

PSI.

March 5, 2025

## 1 Champ magnétique dans un condensateur

Un condensateur plan d'épaisseur $e = 10^{-6}m$ initialement chargé sous la tension $U = 100V$ se décharge en une durée $\tau = 10^{-3}s$. En utilisant l'équation de Maxell-Ampère, déterminer l'ordre de grandeur du champ magnétique induit par cette charge sachant que l'échelle caractéristique de ses variations est le rayon $R = 1mm$ de ses armatures.

## 2 Milieu rendu conducteur

Opérateurs en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi \tag{1}$$

$$div(\vec{a}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(a_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}(\frac{\partial(r\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial\varphi})\vec{u}_r + \frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\sin\theta a_\varphi)}{\partial r})\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial\theta})\vec{u}_\varphi \tag{3}$$

Une sphère métallique de rayon $R_1$ porte initialement une charge $Q_0$ uniformément répartie en surface. Une autre sphère métallique de rayon $R_2 > R_1$ et de même centre est initialement non chargée.

Entre les deux se trouve un gaz conducteur. Suite à un flash lumineux, ce gaz devient conducteur et est caractérisé par sa conductivité $\gamma$. Le gaz est supposé rester localement neutre : $\rho = 0$.

1. On appelle $Q(t)$ la charge portée par la sphère intérieure. Que vaut le champ électrique entre les deux sphères ?
2. En déduire la densité volumique de courant.
3. Quel est le champ magnétique engendré ?
4. Vérifier les équations de Maxwell. En déduire une équation différentielle satisfaite par $Q(t)$.
5. La résoudre et donner la charge $Q_2(t)$ portée par la seconde sphère.
6. Calculer les énergies électromagnétiques initiale et finale.
7. Commenter par un bilan énergétique complet.
8. Expliquer simplement le processus d'ionisation par flash.

# 3 Ligne coaxiale

Le câble coaxial ou ligne coaxiale est une ligne de transmission, composée d'un câble à deux conducteurs de même axe. L'âme centrale (en cuivre par exemple), est entourée d'un isolant (matériau diélectrique). Le diélectrique est entouré d'une gaine conductrice tressée (ou feuille d'aluminium enroulée), nommée blindage, puis d'une enveloppe de matière plastique, par exemple du PVC. Ce type de câble est utilisé pour la transmission de signaux numériques ou analogiques à haute ou basse fréquence. Le courant circule dans un sens dans le cylindre métallique intérieur en étant réparti dans tout son volume. Ce courant revient dans l'autre sens par le blindage en étant réparti en surface.

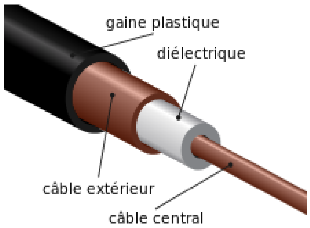



Figure 1: Câble coaxial.

On donne en cylindriques :

$$div(\vec{a}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{4}$$

Une ligne coaxiale est constituée de deux cylindres $C_1$ et $C_2$ infinis d'épaisseur très faible, de rayons $a$ et $b$, parcourus par des intensités $I$ et $-I$. On note $V_1$ et $V_2$ les potentiels des deux cylindres et on néglige toute (résistance) chute de tension le long de la ligne.

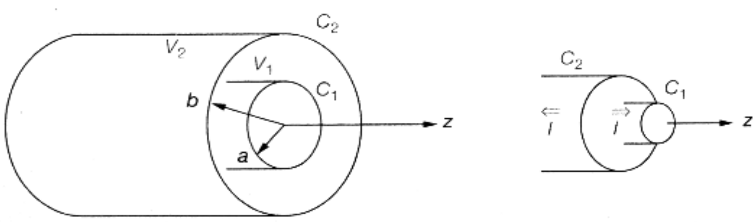



Figure 2: Câble coaxial.

1. Déterminer le champ magnétique en tout point.

2. Justifier le caractère radial du champ électrique, de quelle(s) coordonnée(s) dépend-il ?

3. On postule une dépendance en $\frac{K}{r}$ vis-à-vis de la distance $r$ à l'axe $(Oz)$. Déterminer la constante $K$.

4. Calculer le vecteur de Poynting en tout point situé entre les deux conducteurs.

5. En déduire l'expression du flux de ce vecteur à travers un plan de section droite. L'exprimer en fonction de $V_1$, $V_2$ et $I$.

# 4 Solénoïde

On considère un solénoïde infini, d'axe $(Oz)$, de rayon $R$, comportant $n$ spires par unité de longueur et parcouru par le courant $I(t)$.

On désire trouver une approximation du champ électromagnétique.

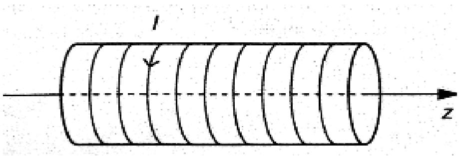



Figure 3: Solénoïde.

1. En supposant que l'expression du champ magnétique s'identifie à celle obtenue en statique, exprimer celui-ci à l'intérieur du solénoïde.

2. Expliquer pourquoi le champ électrique est nécessairement non nul.

3. Quelle est la forme du champ électrique ?

4. Intégrer une équation de Maxwell sur un disque de rayon $r < R$ et en déduire l'expression du champ électrique.

5. Montrer qu'il s'agit d'une solution approximative, l'une des quatre équations de Maxwell n'étant pas vérifiée.

# 5 Bilan énergétique de la charge d'un condensateur

Les aramatures d'un condensateur plan, constituées de deux disques conducteurs, de surfaces $S = \pi a^2$ et de rayon $a$, de même axe $(Oz)$ et séparés d'une distance $e$ sont reliées à un générateur de fem $\mathcal{E}$ par une résistance $R$.

Initialement le condensateur est déchargé. A un instant quelconque où la tension à ses bornes vaut $V(t)$, ses armatures portent respectivement les charges $q(t) = CV(t)$ et $-q(t)$ où $C = \frac{S\varepsilon_0}{e}$ est la capacité du condensateur.

On néglige les effets de bords, de telle sorte qu'en coordonnées cylindriques le champ électromagnétique dans le condensateur est en 1ère approximation de la forme :

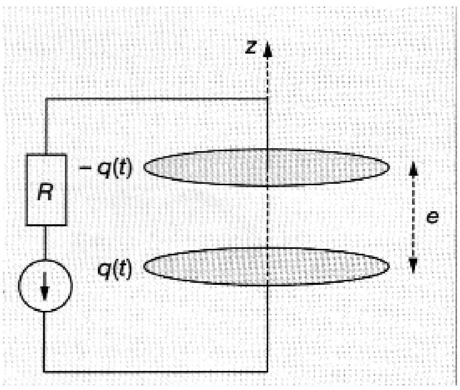



Figure 4: Condensateur plan.

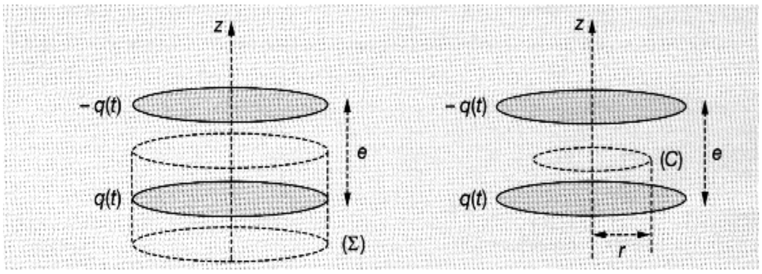
$$\vec{E} = E(t)\vec{u}_z \tag{5}$$
$$\vec{B} = B(r,t)\vec{u}_\theta \tag{6}$$

Le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur.

1. En utilisant les lois de l'électrocinétique, déterminer $V(t)$ et montrer que le condensateur reçoit au cours de l'opération une énergie :

$$U_c = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 \tag{7}$$

2. A un instant quelconque, déterminer le champ $E(t)$ en utilisant le théorème de Gauss sur la surface $(\Sigma)$ représentée en pointillés sur la figure de gauche et $B(r,t)$ en appliquant le théorème d'Ampère généralisé au contour $(C)$ (cercle de rayon $r < a$ et d'axe $(Oz)$) représenté en pointillés sur la figure de droite.




3. En déduire la puissance électromagnétique $\mathcal{P}$ reçue par l'intérieur du condensateur, puis l'énergie électromagnétique $U_{em}$ emmagasinée par le condensateur au cours de sa charge.

   Comparer avec l'énergie $U_c$ déterminée à la question précédente.

4. Retrouver $U_{em}$ en utilisant la densité d'énergie électromagnétique $u_{em}$ dans l'état initial et dans l'état final.

5. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, montrer que les champs déterminés à la 1ère question ne peuvent convenir que si $\frac{d^2q}{dt^2} = 0$.

# 6 Foudre en boule

On cherche à rendre compte de l'évolution d'une boule constituée d'un nombre $N$ de particules portant une même charge $q$ plongée dans l'air. Ces charges engendrent un champ électrique variable $\vec{E} = E(r,t)\vec{u}_r$.

Sous l'effet de ce champ, les charges qui se déplacent dans l'air acquièrent un vecteur vitesse $\vec{v} = \mu\vec{E}$ où la constante $\mu$ appelée mobilité des charges est du signe de $q$.

On note $\rho(t)$ la densité volumique de charges ; on suppose qu'elle reste uniforme et on note $\rho_0$ sa valeur initiale. On rappelle que $div(\overrightarrow{OM}) = 3$.

1. Exprimer $E(r,t)$ en fonction de $\varepsilon_0$, $\rho(t)$ et $r$ pour $r \leq R$.

2. Exprimer $\vec{j}$ en fonction de $\mu$, $\varepsilon_0$, $\rho(t)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}$. En déduire le champ magnétique $\vec{B}$.

3. Déduire de l'équation de conservation de la charge que $\rho(t)$ est solution d'une équation différentielle du 1er ordre à variables séparables et la résoudre.

4. En déduire l'expression de $R(t)$ puis retrouver le résultat en envisageant le mouvement d'une charge située à chaque instant au bord de la boule chargée.

# 7 Décharge d'un condensateur dans l'air

On constate expérimentalement qu'une boule conductrice de rayon $R$, uniformément chargée et abandonnée dans l'air avec une charge $q_0$ se décharge.

Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est un milieu faiblement conducteur de conductivité $\sigma$ : la densité de charge $\rho$ y est nulle et la densité de courants $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ y est fournie par la loi d'Ohm.

L'origine de l'espace étant prise au centre $O$ de la boule, on adopte des coordonnées sphériques de centre $O$ et on cherche un champ électromagnétique de la forme $\vec{E} = E(r,t)\vec{u}_r, \vec{B} = \vec{0}$.

1. Déterminer $E(r,t)$ en fonction de $q(t)$, $\varepsilon_0$ et $r$.

2. Déterminer $q(t)$ en fonction de $q_0$, $\sigma$, $\varepsilon_0$ et $t$. Pourquoi les expériences d'électrostatique sont-elles plus difficiles à réaliser lorsque l'air est humide ?

# 8 Bilan énergétique d'un solenoïde dans l'ARQS

Un solénoïde de longueur $l$ et d'axe $(Oz)$ comprend $N$ spires circulaires de rayon $a$ parcourues par un courant d'intensité $I(t)$. On se place dans l'ARQS.

1. On néglige les effets de bords. Rappeler l'expression du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde. Chercher le champ électrique associé sous la forme $\vec{E}_\theta(r)\vec{u}_\theta$ en exploitant la loi de Faraday pour un contour $(C)$ bien choisi.

2. En déduire la puissance électromagnétique $\mathcal{P}_{em}$ entrant dans le solenoïde.

3. Exprimer l'énergie magnétique $U_m$ du solénoïde. Comparer $\frac{dU_m}{dt}$ à $\mathcal{P}_{em}$ et commenter.

# 9 Faisceau d'électrons

On envisage une répartition de charges dans un cylindre d'axe $(Oz)$ et de rayon $a$ comprenant une densité volumique $n_p(r)$ de protons fixes liés à un support et une densité volumique $n_e$ d'électrons libres, mobiles avec une vitesse constante $\vec{v} = v\vec{u}_z$. On note $(\vec{E}, \vec{B})$ le champ électromagnétique créé.

1. Exprimer la densité de charges $\rho$ et la densité de courants $\vec{j}$. Vérifier l'équation locale de conseration de la charge.

2. On néglige toute autre force entre particules que les forces électromagnétiques. En déduire une relation entre $\vec{E}$, $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

3. On rappelle que $div(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{a} - \vec{a}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{b}$. Quelles sont les équations locales dont sont solutions $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ?

   En déduire l'expression de $n_e(r)$ en fonction de $n_p(r)$, $v$ et $c$.

## 10 Contraction de Lorentz-Fitzgerald

On considère deux faisceaux de protons cylindriques parallèles confondus avec les axes $x = 0$ et $x = a$.

Les protons ont une charge $q$ et une vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_z$ dans le référentiel $(R) = (Oxyz)$ et les faisceaux ont dans ce référentiel une densité linéique $\lambda = \frac{dq}{dz}$. Dans le référentiel $(R')$ lié aux protons, les faisceaux ont a priori une densité linéique $\lambda' \neq \lambda$.

1. Déterminer le champ électromagnétique créé par un faisceau de protons en tout point de l'espace d'une part, dans $(R)$, et, d'autre part, dans $(R')$.

2. Exprimer la force linéique d'intéraction entre les deux faisceaux d'une part, dans $(R)$, et, d'autre part, dans $(R')$.

3. En admettant que la charge d'un élément de longueur a la même valeur dans $(R)$ et dans $(R')$, en déduire l'expression du rapport $\frac{dz'}{dz}$. Pourquoi parle-t-on de contraction des longueurs ?

## 11 Champ créé par émission de charges

Un matériau radioactif assimilé au plan d'équation $z = 0$ émet à partir de l'instant $t = 0$ des charges $q$ symétriquement avec une vitesse $\pm v\vec{u}_z$. On note $\delta^2 N = \alpha dt dx dy$ le nombre de charges émises pendant $dt$ par un élément de plaque de surface $dxdy$ avec $\alpha$ constante.

On suppose que les charges conservent leur vitesse initiale.

1. On se place dans le domaine $z > vt$. Montrer que $\rho(M,t) = 0$ et $\vec{j}(M,t) = \vec{0}$.

2. On se place dans le domaine $0 < z < vt$. Pendant quelle durée ont été émises les charges qui se situent à l'instant $t$ dans une colonne de section $dxdy$ entre les cotes $z$ et $z+dz$ ? En déduire les expressions de $\rho(M,t)$ et de $\vec{j}(M,t)$. Donner les expressions correspondantes pour $z < 0$.

3. Quelle est, à l'instant $t$, la charge surfacique $\sigma(t)$ de la plaque ?

4. Déterminer le champ électromagnétique dans le domaine $z > 0$ puis dans le domaine $z < 0$.

5. Calculer l'énergie électromagnétique $\frac{dU_{em}}{dxdy}$ contenue dans une colonne de section $dxdy$ s'étendant de $z = -\infty$ à $z = +\infty$. Commenter.

## 12 Symétries du champ en régime variable

Une boule radioactive émet des particules alpha portant une charge $+2e$ radialement de manière isotrope. Montrer que le champ magnétique créé en un point $M$ repéré par ses coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$ est nul et que le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E(r,t)\vec{u}_r$.

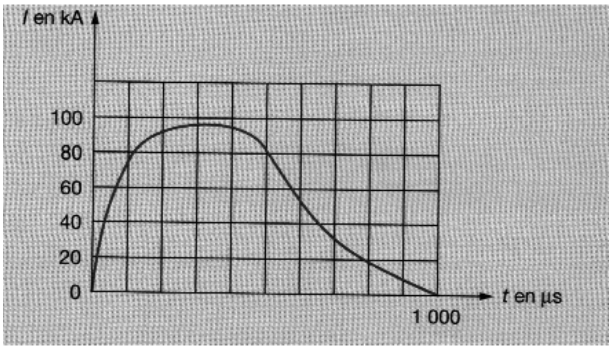
## 13 Atome d'hydrogène

On adopte pour l'atome d'hydrogène un modèle planétaire classique où l'électron possède une trajectoire circulaire de rayon $a \approx 10^{-10} m$.

1. Evaluer l'ordre de grandeur de la période $T$ du mouvement. Peut-on faire l'ARQS ?
2. On remplace l'électron par une spire circulaire de rayon $a$ parcourue par un courant moyen $I$. Calculer $I$. Chercher l'expression de la norme $B$ du champ magnétique $\vec{B}$ créé par l'électron sur le proton sous la forme d'un monôme $B = \mu_0 I^p a^q$ et calculer $B$.
3. Calculer le rapport de l'énergie magnétique volumique sur l'énergie électrique volumique au niveau du proton.

# 14 Impact de la foudre sur les circuits

La foudre peut engendrer des tensions perturbatrices dans les circuits électriques. L'allure du courant $I(t)$ dans le canal de foudre est donnée ci-dessous.




1. Justifier qu'on peut utiliser les lois de l'ARQS.
2. Interpréter la perturbation et indiquer à quel moment elle est la plus forte.

# 15 Plaque chargée en mouvement

Une plaque plane isolante de masse $m$ et de grande surface uniformément chargée en surface avec une densité $\sigma$ et assimilée au plan infini $x = 0$ est lancée en translation à l'instant $t = 0$ avec une vitesse $v_0\vec{u}_z$. On note $v(t)\vec{u}_z$ sa vitesse à l'instant $t > 0$. On donne les expressions du champ électromégnétique créé dans les domaines $0 < x < ct$ et $x > ct$ :

$$\vec{E}(0 < x < ct) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_x - \frac{\mu_0 c\sigma}{2}v(t - \frac{x}{c})\vec{u}_z \quad (8)$$

$$\vec{E}(x > ct) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_x \quad (9)$$

$$\vec{B}(0 < x < ct) = \frac{\mu_0\sigma}{2}v(t - \frac{x}{c})\vec{u}_y \quad (10)$$

$$\vec{B}(x > ct) = \vec{0} \quad (11)$$

1. Tester la pertinence de ces expressions (symétries, invariances et homogénéité).
2. Donner les expressions correspondantes dans le domaine $x < 0$.
3. En déduire la composante selon $\vec{u}_z$ de la force subie par la plaque, puis en supposant qu'elle ne subit aucune autre force, l'expression de la vitesse $v(t)$ en fonction de $v_0$, $t$, $\mu_0$, $m$, $\sigma$, $c$ et $S$.

4. Exprimer la partie variable de l'énergie électromagnétique de l'espace situé de part et d'autre de la plaque de surface $S$ et interpréter l'évolution de $v(t)$.