OEM dans le vide.

PSI.

March 16, 2025

Dans ce chapitre, on étudie le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans le vide $(\rho = 0; \vec{j} = \vec{0})$ c'est-à-dire loin de ses sources (atomes, antennes...) très localisées.

1 Rappel :

1.1 Les équations de Maxwell dans le vide :

Les équations de Maxwell dans le vide sont les suivantes :

$$\text{MG} : div(\vec{E}) = 0 \tag{1}$$

$$\text{MF} : \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\text{M}\Phi : div(\vec{B}) = 0 \tag{3}$$

$$\text{MA} : \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4}$$

1.2 Equations de propagation dans le vide :

On en déduit les équations de propagation de d'Alembert vectoriel dans le vide de $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \tag{5}$$

$$\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \tag{6}$$

$$\text{en posant : } c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{7}$$

Les solutions sont des OPPH $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x$ seulement si l'équation se réduit à l'équation de d'Alembert scalaire :

$$\Delta E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

$$\text{avec : } \Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \tag{9}$$

En effet, si le champ dépend de deux variables cartésiennes, les solutions de l'équation de propagation vectoriel ne seront pas des OPPH car l'OEM n'est pas plane.

1.3 En cartésiennes :

En cartésiennes (seulement !) on peut retrouver l'expression de tous les opérateurs avec l'opérateur $\vec{\nabla}$. Ainsi le laplacien est défini par :

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \tag{10}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{11}$$

Ainsi (5) donne 3 équations de d'Alembert scalaires découplées :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \tag{14}$$

puisque *a priori* :

$$E_x = E_x(x, y, z) \tag{15}$$

$$E_y = E_y(x, y, z) \tag{16}$$

$$E_z = E_z(x, y, z) \tag{17}$$

Il en est de même pour $\vec{B}$.

2 OPPH dans le vide :

OPPH signifie Onde Plane Progressive Harmonique :

- L'onde est **progressive** car elle se **propage** (au contraire une onde stationnaire ne se propage pas) ;
- **sinusoïdal** est synonyme d'**harmonique** ;
- en optique, l'onde est dite **plane** car une **surface d'onde est plane** i.e si sa phase est de la forme $\psi(x, t) = \omega t - kx$.
- en physique des ondes, l'onde est dite **plane** si son amplitude et sa phase ne dépendent que d'une seule variable cartésienne et du temps. Ainsi, l'onde $a(M, t) = A_M(x, y, z, t)\cos(\omega t - kx)$ est plane au sens de l'optique mais pas de la physique des ondes. En cartésiennes, l'équation d'un plan est par exemple $x = cste$.

On appelle OPPH une solution des équations de Maxwell dans le vide dont toutes les composantes du champ électromagnétique sont de la forme :

$$a(M,t) = A\cos\Big(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \varphi\Big) \tag{18}$$
$$\text{avec : } \vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r \tag{19}$$
$$\text{le vecteur d'onde est : } \vec{k} = k\vec{u} \tag{20}$$

Les 6 composantes du champ électromagnétique ont même vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}$, même pulsation ω mais des amplitudes A et phase φ *a priori* différentes.

2.1 Grandeurs complexes :

Soit une OPPH :

$$\vec{E} = \vec{E}_0\cos\Big(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \varphi\Big) \tag{21}$$
$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z - \varphi) \tag{22}$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = j\omega} \tag{23}$$

et :

$$\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial x} = -jk_x\underline{\vec{E}} \tag{24}$$
$$\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial y} = -jk_y\underline{\vec{E}} \tag{25}$$
$$\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial z} = -jk_z\underline{\vec{E}} \tag{26}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{\nabla} = -j\vec{k}} \tag{27}$$

Remarque :

$$\text{Si on avait posé : } \vec{E} = \vec{E}_0\cos\Big(-\omega t + \vec{k}\cdot\vec{r} - \varphi\Big) \tag{28}$$
$$\text{alors on aurait eu : } \frac{\partial}{\partial t} = -j\omega \tag{29}$$
$$\text{et : } \vec{\nabla} = j\vec{k} \tag{30}$$

Attention ! Si l'onde est progressie harmonique mais non plane alors $\vec{\nabla} \neq j\vec{k}$

2.2 Relation de structure :

En complexes, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{MG} : \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \tag{31}$$

$$\text{MF} : \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \tag{32}$$

$$\text{M}\Phi : \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \tag{33}$$

$$\text{MA} : \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \tag{34}$$

Or (27) et (23) d'où :

$$\text{MG} : -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \tag{35}$$

$$\text{MF} : -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}} \tag{36}$$

$$\text{M}\Phi : -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \tag{37}$$

$$\text{MA} : -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 j\omega \underline{\vec{E}} \tag{38}$$

$$\text{avec} : \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \tag{39}$$

2.3 Champs transverses :

♡ Les équations de MG et MΦ montrent que les OPPH sont **transversales** (ou **transverses**) :

$$\vec{u} \cdot \vec{E} = 0 \tag{40}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{B} = 0 \tag{41}$$

2.4 Relation de dispersion :

Considérons MF et MA ou l'équation de propagation :

$$\vec{u} \wedge \frac{k}{\omega}(\vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}) = -\frac{\omega}{kc^2}\underline{\vec{E}} \tag{42}$$

$$(\vec{u} \cdot \underline{\vec{E}})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u})\underline{\vec{E}} = -\frac{\omega^2}{k^2c^2}\underline{\vec{E}} \tag{43}$$

$$\text{or (40) d'où} : -\underline{\vec{E}} = -\frac{\omega^2}{k^2c^2}\underline{\vec{E}} \tag{44}$$

$$\text{soit} : k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{45}$$

La **relation de dispersion est en général la relation entre** k **et** ω obtenue à partir de l'équation de progagation. Dans le cas des OEM dans le vide, on a :

$$\boxed{k = \pm\frac{\omega}{c}} \tag{46}$$

♡ La vitesse de phase v_φ est définie par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \tag{47}$$

Pour une OPPH se propageant dans le vide v_φ est indépendant de ω. C'est pourquoi le vide est un milieu non dispersif.

$$\boxed{v_\varphi = c} \tag{48}$$

♡ D'une façon générale, tous les phénomènes de propagation régis par une équation de d'Alembert son non dispersifs.

$$(36) \text{ donne : } \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}}{c} \tag{49}$$

$$\text{considérons la partie réelle : } \operatorname{Re}(\vec{B}) = \frac{\vec{u} \wedge \operatorname{Re}(\underline{\vec{E}})}{c} \tag{50}$$

♡ D'où la **relation de structure d'une OPPH** dans le vide :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \tag{51}$$

$(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre direct ; $\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont en phase et :

$$\frac{E(M,t)}{B(M,t)} = c \tag{52}$$

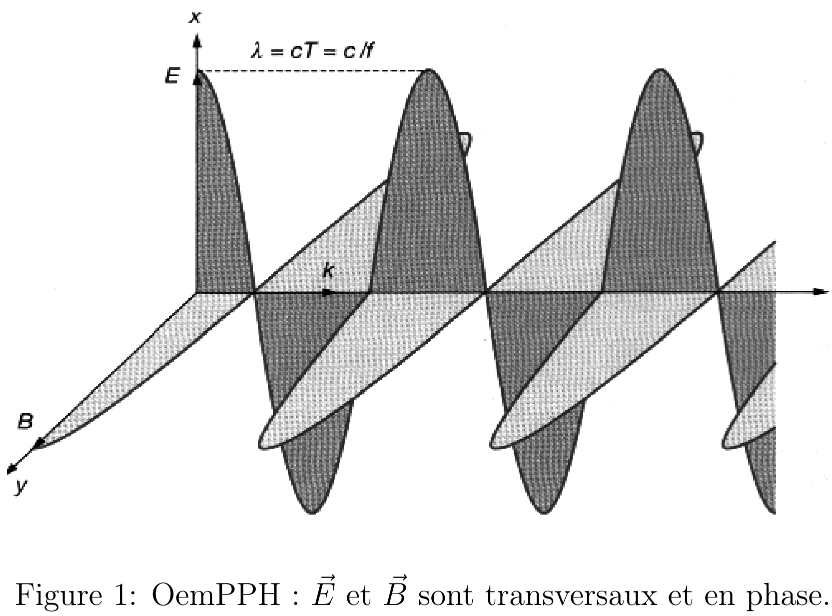


Figure 1: OemPPH : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transversaux et en phase.

2.5 Généralisation aux ondes non harmoniques :

Si on superpose des OPPH dans le vide se propageant dans la même diretion $\vec{u}$ et ayant des ω différentes, alors l'onde résultante a aussi la structure d'une OPPH.

En effet :

$$\vec{u} \cdot \vec{E}_\omega = 0 \tag{53}$$
$$\sum_\omega \vec{u} \cdot \vec{E}_\omega = 0 \tag{54}$$
$$\vec{u} \cdot (\sum_\omega \vec{E}_\omega) = 0 \tag{55}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{E} = 0} \tag{56}$$

$$\vec{B} = \sum_\omega \vec{B}_\omega \tag{57}$$
$$\vec{B} = \sum_\omega \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}_\omega}{c} \tag{58}$$
$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge (\sum_\omega \vec{E}_\omega)}{c} \tag{59}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}} \tag{60}$$

3 Polarisation des OPPH :

La polarisation de la lumière représente son caractère **vectoriel**.

3.1 Définition :

♡ Par définition, la **direction de polarisation** est la direction du champ électrique $\vec{E}$.

On appelle plan de polarisation le plan défini par $\vec{E}$ et le vecteur d'onde $\vec{k}$.

3.2 Polarisation elliptique :

Une OPPH se propageant dans le sens $+\vec{u}_x$, polarisée elliptiquement, a un champ électrique $\vec{E}$ de la forme :

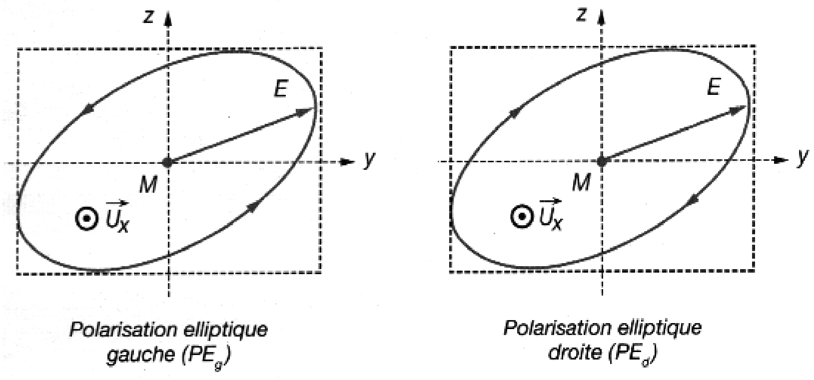


Figure 2: Polarisation elliptique gauche (PE_g) et droite (PE_d).

$$E_x = 0 \tag{61}$$
$$E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kx) \tag{62}$$
$$E_z = E_{0z}\cos(\omega t - kx - \varphi) \tag{63}$$

En un point x fixé, $\vec{E}$ décrit au cours du temps une ellipse. En $x = 0$ on a un champ analogue aux tensions suivantes visualisées sur l'oscilloscope :

$$\text{sur la voie 1X : } u_1(t) = U_{1m}\cos(\omega t) \tag{64}$$
$$\text{sur la voie 2Y : } u_2(t) = U_{2m}\cos(\omega t - \varphi) \tag{65}$$

φ représente le déphasage de $u_1(t)$ par rapport à $u_2(t)$. En **XY**, on visualise une ellipse qui se réduit à :

- un cercle si $U_{1m} = U_{2m}$;
- une droite si $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pm\pi$

On peut toujours effectuer une rotation de sorte que les axes $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ coïncident avec les axes de l'ellipse.

♡ Le champ $\vec{E}$ d'une onde **polarisée elliptiquement** (PE) peut alors s'écrire sous la forme :

$$E_x = 0 \tag{66}$$
$$E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kx) \tag{67}$$
$$E_z = \pm E_{0z}\sin(\omega t - kx) \tag{68}$$

Pour déterminer le sens de parcours on se place en $x = 0$ et **on regarde dans la direction opposée à la direction de propagation**. Entre $t = 0$ et $t = \frac{T}{4}$, si $\vec{E}$ tourne dans le sens anti-horaire (cas du signe +) alors la polarisation elliptique est gauche (PE_g) sinon (cas du signe −) elle est droite (PE_d).

Attention !

Il y a un changement de sens de rotation quand on passe de la convention $\exp j(\omega t - kx)$ à la convention $\exp j(-\omega t + kx)$.

3.3 Polarisation circulaire :

♡ Dans le cas particulier d'une **polarisation circulaire** (PC), $E_{0x} = E_{0y} = E_0$:

$$E_x = 0 \tag{69}$$
$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx) \tag{70}$$
$$E_z = \pm E_0 \sin(\omega t - kx) \tag{71}$$

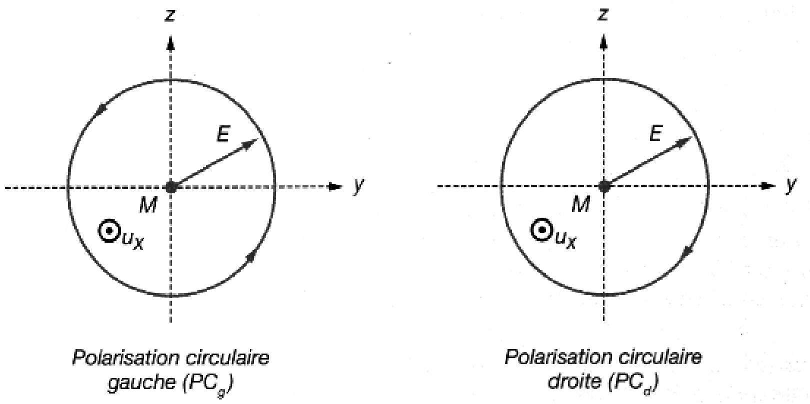


Figure 3: Polarisation circulaire gauche (PC_g) (+) et droite (PC_d) (−).

3.4 Polarisation rectiligne :

Dans le cas particulier d'une polarisation rectiligne (PR), les deux composantes de $\vec{E}$ sont en phase ou en opposition de phase soit $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pm\pi$:

$$E_x = 0 \tag{72}$$
$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx) \tag{73}$$
$$E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx) \tag{74}$$
$$\text{la norme du champ est : } E_0 = \sqrt{E_{0y}^2 + E_{0z}^2} \tag{75}$$

♡ Dans le cas d'une **polarisation rectiligne** (PR), le champ est de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx) \tag{76}$$

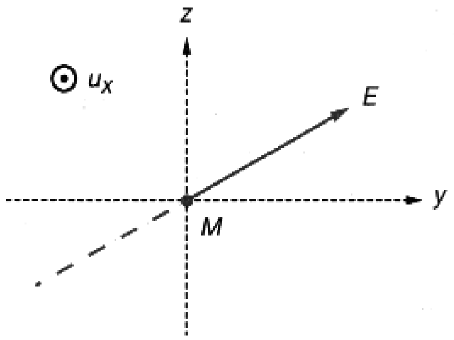


Figure 4: Polarisation rectiligne.

Le cas le plus général est la polarisation elliptique. Or, une OPPH (PE) peut toujours être considérée comme la superposition de deux OPPH (PR) telles que leurs directions de polarisation sont perpendiculaires :

$$\vec{E} = E_{0y}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y + E_{0z}\sin(\omega t - kx)\vec{u}_z \tag{77}$$

L'OPPH (PR) **constitue le maillon élémentaire de la théorie des OEM**.

4 Propagation de l'énergie des OPPH :

4.1 Moyennes temporelles :

Exprimons la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

$$\text{Par définition : } \vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} \tag{78}$$

$$\text{or une OPPH est telle que : } \vec{B} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c} \tag{79}$$

$$\text{d'où : } \vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{E}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{E})}{\mu_0 c} \tag{80}$$

$$\text{or la formule du double produit vectoriel est : } \vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \tag{81}$$

$$\text{d'où : } \vec{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mu_0 c}[(\vec{E}\cdot\vec{E})\vec{u} - (\vec{E}\cdot\vec{u})\vec{E}] \tag{82}$$

$$\text{l'OPPH est transverse d'où : } \vec{\mathcal{R}} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{u} \tag{83}$$

$$\text{or (7) : } \frac{1}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c \tag{84}$$

$$\vec{\mathcal{R}} = \varepsilon_0 E^2 c\vec{u} \tag{85}$$

$$\text{or (52) : } B = \frac{E}{c} \tag{86}$$

$$\text{d'où : } \vec{\mathcal{R}} = \frac{B^2}{\mu_0}c\vec{u} \tag{87}$$

On en déduit la moyenne temporelle :

$$< \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{u} >= \varepsilon_0 < E^2 > c = \frac{< B^2 >}{\mu_0} c \tag{88}$$

Remarque :

$< \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{u} >$ s'exprime en $W.m^{-2}$ et correspond à l'intensité lumineuse I en optique. On retrouve bien que I est proportionnelle à $< E^2 >$.

En optique, les détecteurs sont sensibles à la moyenne temporelle $< \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{u} >$ car le temps de détection est beaucoup plus grand que la période $T = \frac{1}{\nu} \approx qlq 10^{-15} s$ des OEM du domaine visible.

Dans le cas général d'une polarisation elliptique :

$$< E^2 > = < E_{0y}^2 \cos^2(\omega t - kx) + E_{0z}^2 \sin^2(\omega t - kx) > \tag{89}$$

$$< E^2 > = E_{0y}^2 < \cos^2(\omega t - kx) > + E_{0z}^2 < \sin^2(\omega t - kx) > \tag{90}$$

$$\text{or : } < \cos^2(\omega t - kx) > = < \sin^2(\omega t - kx) > = \frac{1}{2} \tag{91}$$

$$\text{d'où : } < E^2 > = \frac{1}{2}(E_{0y}^2 + E_{0z}^2) \tag{92}$$

$$< E^2 > = \frac{E_0^2}{2} \tag{93}$$

On en déduit la **densité volumique d'énergie électromagnétique** u_{em} :

$$\text{Par définition : } u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{94}$$

$$\text{or (52) d'où : } \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2c^2\mu_0} E^2 \tag{95}$$

$$\text{or (7) d'où : } \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{96}$$

Finalement, on constate qu'il y a **équipartition des énergies électrique et magnétique dans une OPPH** :

$$\boxed{u_{em} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}} \tag{97}$$

Finalement, on constate qu'**en moyenne l'énergie électromagnétique d'une OPPH est répartie uniformément dans l'espace** :

$$< \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{u} > = < u_{em} > c = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} c = \frac{B_0^2}{2\mu_0} c \tag{98}$$

Une intégration sur tout l'espace conduirait à une énergie électromagnétique infinie :

$$U_{em} = \iiint_{espace} < u_{em} > d\tau \tag{99}$$

$$U_{em} = < u_{em} > V_{espace} \tag{100}$$

$$U_{em} \to \infty \tag{101}$$

On montre ainsi le **caractère non physique des OPPH**. D'autre part, on constate que les contributions des 2 OPPH PR qui constituent l'onde PE sont additives (92). L'OPPH PR est donc le maillon élémentaire de la théorie des OEM dans le vide, y compris pour ses aspects énergétiques.

En effet, l'étude des interférences en optique a montré que la lumière est constituée de trains d'ondes. Un train d'ondes est une superposition d'OPPH de fréquence différentes.

Attention ! **Aucune grandeur énergétique ne peut être complexe car $\vec{\mathcal{R}}$ et u_{em} sont quadratiques et donc non linéaires** .

4.2 Ordre de grandeurs :

Il faut être capable de donner l'odg de flux énergétiques surfaciques moyens (laser He-Ne, Soleil, téléphone portable ...) et en déduire l'odg du champ électrique associé.

- Fort ensoleillement :

$$< \|\vec{\mathcal{R}}\| > \approx 1kW.m^{-2} \tag{102}$$
$$\text{d'où : } E_0 \approx \sqrt{2\mu_0 c < \|\vec{\mathcal{R}}\| >} \tag{103}$$
$$E_0 \approx \sqrt{2 \times 4\pi 10^{-7} \times 3.10^8.10^3} \tag{104}$$
$$\text{soit : } E_0 \approx 1kV.m^{-1} \tag{105}$$

- Le laser He-Ne donne les mêmes ordres de grandeurs. En effet :

$$\text{sa puissance est : } \mathcal{P} \approx 1mW \tag{106}$$
$$\text{répartie sur une surface : } S \approx 1mm^2 \tag{107}$$
$$\text{d'où : } < \|\vec{\mathcal{R}}\| > \approx \frac{10^{-3}}{(10^{-3})^2} \tag{108}$$
$$< \|\vec{\mathcal{R}}\| > \approx 1kW.m^{-2} \tag{109}$$

- Un téléphone portable :

$$\text{sa puissance est : } \mathcal{P} \approx 1mW \tag{110}$$
$$\text{répartie sur une sphère de surface : } S = 4\pi d^2 \tag{111}$$
$$\text{à } d = 10cm : < \|\vec{\mathcal{R}}\| > \approx \frac{10^{-3}}{4\pi(10.10^{-2})^2} \tag{112}$$
$$< \|\vec{\mathcal{R}}\| > \approx 8mW.m^{-2} \tag{113}$$
$$\text{d'où : } E_0 \approx \sqrt{2 \times 4\pi 10^{-7} \times 3.10^8 \times 8.10^{-3}} \tag{114}$$
$$\text{soit : } E_0 \approx 2V.m^{-1} \tag{115}$$

4.3 Vitesse de propagation de l'énergie :

$$\text{de (98) on déduit : } <\vec{\mathcal{R}}> = <u_{em}> c\vec{u} \tag{116}$$
$$\text{analogue à : } \vec{j}_m = \rho\vec{v} \tag{117}$$

L'énergie électromagnétique dU_{em} qui traverse $dS\vec{u}$ pendant la durée élémentaire dt est :

$$dU_{em} = <\vec{\mathcal{R}}> \cdot dS\vec{u}dt \tag{118}$$
$$dU_{em} = \| <\vec{\mathcal{R}}> \| dSdt \tag{119}$$

D'autre part, cette énergie dU_{em} se retrouve accumulée dans le cylindre de section dS et de hauteur $v_e dt$ où $\vec{v}_e = v_e\vec{u}$ est la vitesse de propagation de l'énergie :

$$dU_{em} = <u_{em}> dSv_e dt \tag{120}$$
$$\text{en identifiant avec (119) : } <u_{em}> dSv_e dt = \| <\vec{\mathcal{R}}> \| dSdt \tag{121}$$
$$\text{d'où : } v_e = \frac{\| <\vec{\mathcal{R}}> \|}{<u_{em}>} \tag{122}$$
$$\text{dans le cas des OPPH dans le vide (98) donne : } v_e = c \tag{123}$$

5 Le photon :

A toute OEM on peut associer un corpuscule appelé photon qui décrit les échanges entre matière et rayonnement.

- ♡ Un photon est le quantum d'énergie :

$$E = h\nu = \hbar\omega \tag{124}$$
$$\text{avec : } \hbar = \frac{h}{2\pi} \tag{125}$$
$$\text{la constante de Planck vaut : } h = 6,62.10^{-34} J.s \tag{126}$$

- ♡ Un photon a pour quantité de mouvement :

$$\vec{p} = \frac{E}{c}\vec{u} = \frac{h}{\lambda}\vec{u} \tag{127}$$
$$\text{car : } \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} \tag{128}$$
$$\text{d'autre part : } \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u} \tag{129}$$
$$\text{d'où : } \vec{p} = \hbar\vec{k} \tag{130}$$

Calculer le nombre moyen de photons qui traversent chaque seconde la section d'un laser He-Ne.

$$\mathcal{P} = E\frac{dN}{dt} \tag{131}$$

$$\text{soit : } \frac{dN}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{E} \tag{132}$$

$$\text{avec : } \mathcal{P} \approx 1mW \tag{133}$$

$$\text{et : } \lambda = 632nm \tag{134}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1.10^{-3}.632.10^{-9}}{6,62.10^{-34}.3.10^{8}} \tag{135}$$

soit :

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = 3.10^{15} photons/s} \tag{136}$$

Ce nombre élevé justifie l'approche ondulatoire.

6 Etude expérimentale de la polarisation :

Les expériences de polarisation de la lumière attestent du caractère vectoriel des ondes lumineuses. Au début du XIXième siècle, Fresnel introduit le vecteur vibration lumineuse $\vec{E}$. Dans le vide, la polarisation se conserve au cours de la propagation. Seul un milieu optiquement actif peut modifier l'état de polarisation de la lumière.

6.1 Polariseur (PCSI) :

Un polariseur (ou polaroïd) est un verre dichroïque qui possède deux directions privilégiées (milieu anisotrope) orthogonales entre elles : la lame est transparente si $\vec{E}$ est parallèle à $\vec{v}$ (isolante perpendiculairement aux chaînes de polymères) et totalement absorbante (conductrice parallèlement aux chaînes de polymères ainsi le champ est absorbé) si $\vec{E}$ est orthogonal à $\vec{v}$. Il en résulte que le polariseur ne transmet que la composante de $\vec{E}$ selon $\vec{v}$:

$$\vec{E_t} = (\vec{E} \cdot \vec{v})\vec{v} \tag{137}$$

6.2 Lumière naturelle :

La lumière solaire est non polarisée. Mais, sa diffusion par l'atmosphère la polarise partiellement.

Une lampe à incandescence émet une lumière naturelle.

Selon le type de LASER, la lumière émise peut être polarisée, non polarisée ou partiellement polarisée.

La **lumière naturelle est non polarisée** car l'état de polarisation varie alétoirement d'un train d'ondes au suivant.

C'est $\varphi(t)$ qui varie aléatoirement dans le temps sur une durée supérieure à la période T de l'onde et inférieure au temps de réponse du capteur.

Un polariseur placé devant un faisceau de lumière naturelle transmet le champ $E\cos\theta\vec{v}$ où θ est l'angle aléatoire que fait le $\vec{E}$ de chaque train d'onde avec la direction $\vec{v}$ du polariseur.

Le capteur de lumière est sensible à :

$$I = k < E_0^2 \cos^2\theta > \quad (138)$$

$$I = kE_0^2 < \cos^2\theta > \quad (139)$$

$$\text{or } \theta \text{ est aléatoire donc : } < \cos^2\theta > = \frac{1}{2} \quad (140)$$

$$\text{d'autre part l'intensité incidente est : } I_0 = kE_0^2 \quad (141)$$

$$\text{donc : } I = \frac{I_O}{2} \quad (142)$$

Un polariseur transmet 50% de la lumière naturelle ce qui lui donne une couleur grise.

6.3 Loi de Malus :

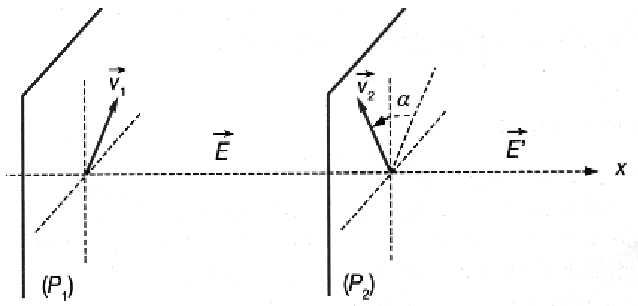


Figure 5: Loi de Malus.

On considère le montage expérimental constitué d' :

- une source de lumière naturelle associée à un collimateur (pour obtenir un faisceau d'ondes planes) ;
- un premier polariseur (P_1) dont le rôle est de **polariser rectilignement** la lumière dans la direction $\vec{v}_1$:

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{v}_1 \quad (143)$$

- un analyseur (P_2) est un polariseur de direction $\vec{v}_2$ faisant un angle α (réglable) avec (P_1). Le champ transmis par (P_2) est la projection de $\vec{E}$ sur la direction $\vec{v}_2$ de (P_2) :

$$\vec{E}' = (\vec{E} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 \tag{144}$$
$$\vec{E}' = E_0 \cos(\omega t - kx)(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 \tag{145}$$
$$\vec{E}' = E_0 \cos(\omega t - kx) \cos \alpha \vec{v}_2 \tag{146}$$

- un détecteur de lumière (photorésistance ou photodiode) qui mesure l'intensité lumineuse $\mathcal{I}$ transmise par l'association de (P_1) et (P_2). Or, $\mathcal{I}$ est proportionnelle à $< E'^2 >$ soit :

$$\mathcal{I} = a < E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \cos^2 \alpha > \tag{147}$$
$$\mathcal{I} = a < E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) > \cos^2 \alpha \tag{148}$$
$$\text{posons : } \mathcal{I}_{max} = a < E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) > \tag{149}$$

La **loi de Malus** exprime les variations d'intensité lumineuse mesurées à la sortie de l'analyseur quand on fait varier l'angle α entre le polariseur et l'analyseur :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{max} \cos^2 \alpha \tag{150}$$

L' **extinction** $\mathcal{I} = 0$ **est obtenue** lorsque le **polariseur et l'analyseur sont croisés** i.e pour $\alpha = 90°$.

On **analyse** une lumière de polarisation inconnue en faisant **tourner l'analyseur** (P_2) pour **obtenir l'extinction**. On en déduit alors que $\vec{E}$ est orthogonal à $\vec{v}_2$.

Exemple 1 : on fait tourner le polariseur éclairé par la lumière d'un écran LCD d'un ordinateur. On constate qu'il y a une extinction. On en déduit que l'écran LCD émet une lumière polarisée.

Exemple 2 : Quand on utilise la barette CCD reliée à CALIENS, on doit limiter l'intensité lumineuse sur le capteur pour empêcher le signal de saturer. On utilise pour cela un jeu de polariseur-analyseur dont on règle l'angle α pour ajuster l'intensité lumineuse selon la loi de Malus. Si la source lumineuse est déjà polarisée alors le polariseur est inutile, l'analyseur suffit.

6.3.1 Synthèse :

Soit le montage expérimental constitué de :

- une source (S) de lumière naturelle (avec un collimateur) émettant des OPPH se propageant dans la direction $\vec{u}_x$.
- un polariseur (P) a pour rôle de polariser rectilignement la lumière dans sa direction de polarisation $\vec{v}$. A la sortie de (P) :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{v} \tag{151}$$

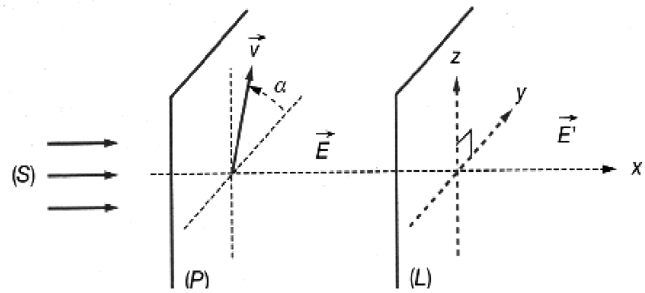


Figure 6: Effet d'une lame $\frac{\lambda}{4}$ ou $\frac{\lambda}{2}$ sur la polarisation .

- une lame quart d'onde (L) dont les lignes neutres sont orientées d'une façon quelconque par rapport à $\vec{v}$ et constituent les axes de référence.

Le champ incident (PR) sur la lame quart d'onde (L) peut s'écrire :

$$E_x = 0 \tag{152}$$
$$E_y = E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kx) \tag{153}$$
$$E_z = E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - kx) \tag{154}$$

Le champ transmis $\vec{E}'$ par la lame quart d'onde (L) peut s'écrire :

$$E'_x = 0 \tag{155}$$
$$E'_y = E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kx) \tag{156}$$
$$E'_z = E_0 \sin\alpha \cos\Big(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\Big) \tag{157}$$

On constate que les 2 composantes du champ électrique ne sont plus en phase : l'onde n'est plus polarisée rectilignement à la sortie de la lame.

La lame quart d'onde (L) a transformé la polarisation rectiligne (PR) en une polarisation elliptique (PE) :

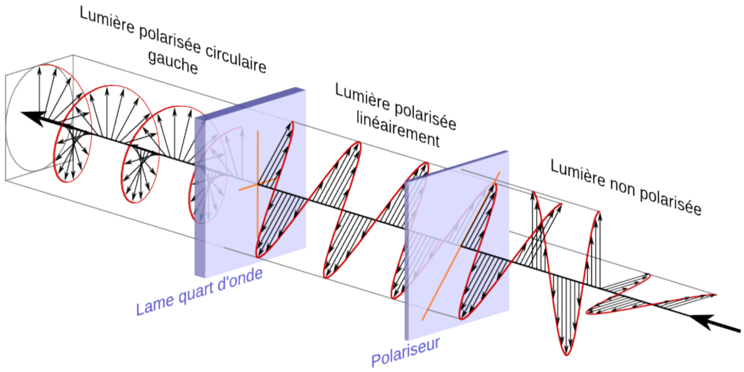
$$E'_x = 0 \tag{158}$$
$$E'_y = E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kx) \tag{159}$$
$$E'_z = E_0 \sin\alpha \sin(\omega t - kx) \tag{160}$$

Les lignes neutres de la lame sont les axes de l'ellipse.

La polarisation elliptique (PE) se réduit à :

- une polarisation rectiligne (PR) si $\alpha = n\frac{\pi}{2}$;

- une polarisation circulaire (PC) si $\alpha = (2n+1)\frac{\pi}{4}$.



6.3.2 Analyse :

Considérons une OEM de polarisation elliptique d'axes $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ arrivant sur un analyseur (P') suivi d'un photodétecteur.

La direction de (P') est :

$$\vec{v} = \cos\alpha\vec{u}_y + \sin\alpha\vec{u}_z \tag{161}$$

Le champ incident (PE) sur (P') est de la forme :

$$E_x = 0 \tag{162}$$
$$E_y = a\cos(\omega t - kx) \tag{163}$$
$$E_z = b\sin(\omega t - kx) \tag{164}$$

Le champ transmis $\vec{E}'$ par (P') est :

$$\vec{E}' = (\vec{E}\cdot\vec{v})\vec{v} \tag{165}$$
$$\text{soit : } \vec{E}' = [a\cos\alpha\cos(\omega t - kx) + b\sin\alpha\sin(\omega t - kx)]\vec{v} \tag{166}$$

On constate donc que la (PE) est donc transformée en (PR) par un polariseur.

Le détecteur est sensible à la moyenne quadratique du champ $\vec{E}'$:

$$< E'^2 > =< [a\cos\alpha\cos(\omega t - kx) + b\sin\alpha\sin(\omega t - kx)]^2 > \quad (167)$$
$$< E'^2 > = a^2\cos^2\alpha < \cos^2(\omega t - kx) > +b^2\sin^2\alpha < \sin^2(\omega t - kx) > \quad (168)$$
$$< E'^2 > = \frac{a^2}{2}\cos^2\alpha + \frac{b^2}{2}\sin^2\alpha \quad (169)$$
$$\text{car : } < \cos^2(\omega t - kx) > =< \sin^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2} \quad (170)$$
$$\text{et : } < \cos(\omega t - kx)\sin(\omega t - kx) > = 0 \quad (171)$$
$$< E'^2 > = \frac{a^2}{2}\cos^2\alpha + \frac{b^2}{2}(1 - \cos^2\alpha) \quad (172)$$
$$\text{le détecteur mesure l'intensité : } \mathcal{I} = \gamma < E'^2 > \quad (173)$$
$$\text{soit : } \mathcal{I} = \gamma\frac{b^2}{2} + \frac{\gamma}{2}(a^2 - b^2)\cos^2\alpha \quad (174)$$
$$\text{l'intensité maximale est : } \mathcal{I}_{max} = \frac{\gamma}{2}a^2 \quad (175)$$
$$\text{l'intensité minimale est : } \mathcal{I}_{min} = \frac{\gamma}{2}b^2 \quad (176)$$

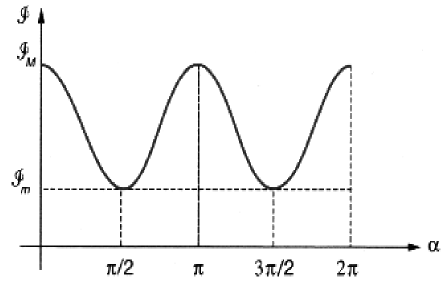


Figure 7: Analyse d'une (PE).

- Si (PE) alors $a \neq b$ soit $\mathcal{I}_{max} \neq \mathcal{I}_{min}$ et $\mathcal{I}_{min} \neq 0$.
- Si (PC) alors $a = b$ soit $\mathcal{I}_{max} = \mathcal{I}_{min}$: $\mathcal{I}(\alpha)$ indépendant de α.
- Si la lumière est non polarisée alors $\mathcal{I}(\alpha)$ indépendant de α.
- Si (PR) alors il existe une direction α qui donne l'extinction $\mathcal{I}_{min} = 0$ et la (PR) est orthogonale à cette direction.

En effet, dans le cas de la (PR) :

$$E'_x = 0 \quad (177)$$
$$E'_y = a\cos\alpha\cos(\omega t - kx) \quad (178)$$
$$E'_z = b\sin\alpha\cos(\omega t - kx) \quad (179)$$
$$\text{d'où : } \mathcal{I} = \frac{\gamma}{2}(a^2 + b^2)\cos^2\alpha \quad (180)$$

6.3.3 Distinction entre (PC) et lumière non polarisée :

Pour distinguer une lumière (PC) d'une lumière non polarisée, on intercale entre la source de lumière et l'analyseur une lame $\frac{\lambda}{4}$ qui transforme la (PC) en (PR). On reconnaît la (PR) par l'existence d'une extinction. Au contraire, la lame ne polarise pas la lumière non polarisée : $\mathcal{I}(\alpha)$ indépendant de α.

Si (PC) alors :

$$E_x = 0 \tag{181}$$
$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx) \tag{182}$$
$$E_z = E_0 \sin(\omega t - kx) \tag{183}$$

Après la lame $\frac{\lambda}{4}$ le champ devient :

$$E_x = 0 \tag{184}$$
$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx) \tag{185}$$
$$E_z = E_0 \sin\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right) \tag{186}$$

soit :

$$E_x = 0 \tag{187}$$
$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx) \tag{188}$$
$$E_z = -E_0 \cos(\omega t - kx) \tag{189}$$

On reconnaît une (PR) puisque le champ est $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ avec $\vec{E}_0$:

$$E_{0x} = 0 \tag{190}$$
$$E_{0y} = E_0 \tag{191}$$
$$E_{0z} = -E_0 \tag{192}$$

La suite est hors programme PSI

6.4 Synthèse et analyse d'une polarisation elliptique :

Les lames à retard sont des lames à faces parallèles constituées d'un cristal **biréfringent**. Elles peuvent être constituées de quartz qui est une variété cristalline de la silice SiO_2 ou de carbonate de calcium cristallisé dans la variété *Spath d'Islande*.

6.4.1 Lame quart d'onde et lame demi-onde :

On éclaire la lame avec un **faisceau de lumière parallèle en incidence normale** pour éviter toute réfraction sur la lame.

Lampe blanche + condenseur (lentille de courte focale) + diaphragme à iris placé dans le plan focal objet d'une lentille convergente + filtre coloré. Le condenseur concentre le faisceau sur le diaphragme qui joue le rôle de source étendue.

ou :

Lame blanche + lentille convergente telle que le filament soit l'objet dans le plan focal objet.

ou :

Laser + objectif de microscope (lentille convergente de courte focale) + lentille convergente telle que $F_1' = F_2$. On réalise ainsi un élargisseur de faisceau ($f_2' > f_1'$).

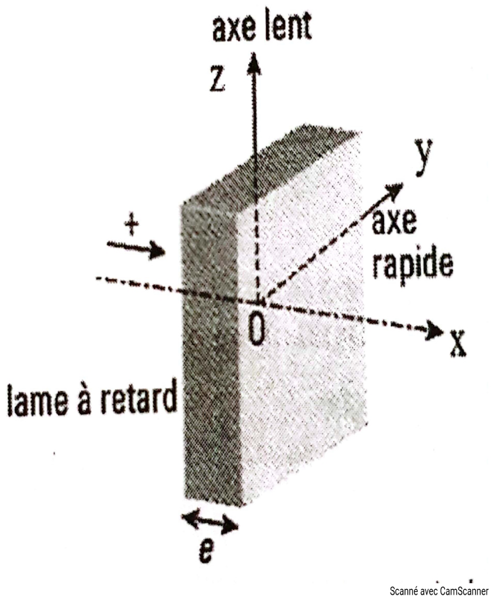


Figure 8: Lame à retard.

Une lame quart d'onde ou demi-onde :

- possède deux directions privilégiées $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$, orthogonales entre elles, appelées **lignes neutres** de la lame et parallèles aux faces de la lame.
- laisse invariante la direction de polarisation d'une onde polarisée rectilignement sur ses lignes neutres.

Une lame $\frac{\lambda}{4}$ retarde de $\frac{T}{4}$, soit $\frac{\pi}{2} rad$, la composante de $\vec{E}$ sur la ligne neutre lente $\vec{u}_z$ par rapport à la composante sur la ligne neutre rapide $\vec{u}_y$. Ainsi le champ transmis $\vec{E}'$ par la lame $\frac{\lambda}{4}$ est lié au champ incident par :

$$E'_y(t) = E_y(t) \tag{193}$$
$$E'_z(t) = E_z(t - \frac{T}{4}) \tag{194}$$

Une lame demi-onde retarde de $\frac{T}{2}$, soit πrad, la composante de $\vec{E}$ sur la ligne neutre lente $\vec{u}_z$ par rapport à la composante sur la ligne neutre rapide $\vec{u}_y$. Ainsi le champ transmis $\vec{E}'$ par la lame $\frac{\lambda}{2}$ est lié au champ incident par :

$$E'_y(t) = E_y(t) \tag{195}$$
$$E'_z(t) = E_z(t - \frac{T}{2}) = -E_z(t) \tag{196}$$

On conclut que l'effet de la lame $\frac{\lambda_0}{2}$ est de transformer $\vec{E}$ en son symétrique de par rapport à l'axe rapide.

A la sortie de la lame d'épaisseur e, le déphasage des deux composantes du champ sont déphasées de :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta \tag{197}$$
$$\text{avec la différence de marche : } \delta = (n_y - n_z)e \tag{198}$$
$$\text{vitesse de propagation sur l'axe rapide : } v_y = \frac{c}{n_y} \tag{199}$$
$$\text{vitesse de propagation sur l'axe lent : } v_z = \frac{c}{n_z} \tag{200}$$

Dans le cas du *Spath d'Islande* :

$$\text{L'axe } \textbf{rapide} \text{ est tel que : } n_y = 1,47 \tag{201}$$
$$\text{L'axe } \textbf{lent} \text{ est tel que : } n_z = 1,66 \tag{202}$$
$$\text{La } \textbf{biréfringence} \text{ est définie par : } \Delta n = n_z - n_y \tag{203}$$

La lame 1/2 onde est taillée pour épaisseur e telle que $\varphi = \pi + 2\pi p$.
La lame 1/4 onde est taillée pour épaisseur e telle que $\varphi = \frac{\pi}{2} + p\pi$.

Une lame n'est quart d'onde ou demi-onde que pour une pulsation donnée. L'utilisation d'une telle lame exige donc de **travailler en lumière monochromatique** en utilisant un filtre coloré ou un laser.

6.4.2 Détermination des axes d'une lame :

- Croiser (P) et (A).
- Introduire la lame à retard entre (P) et (A).

- Tourner la lame pour rétablir l'extinction : les axes de la lame coïncident avec les direstions $\vec{v}_p$ et $\vec{v}_a$.

Un trait repère l'axe lent d'une lame connue.
Pour distinguer l'axe lent de l'axe rapide d'une lame $\frac{\lambda}{4}$ (en l'absence de repère) :

- Intercaler successivement 2 lames $\frac{\lambda}{4}$(dont l'une est connue) entre (P) et (A) initialement croisés et tourner chaque lame pour rétablir l'extinction. Les axes des lames coïncident alors avec v_p et $\vec{v}_a$.
- Les axes des lames peuvent être en coïncidence (axe lent sur axe lent) ou en anticoïncidence (axe lent sur axe rapide).
- Si les axes sont en coïncidence alors l'association des 2 lames $\frac{\lambda}{4}$ équivaut à une lame $\frac{\lambda}{2}$.
- Si les axes sont en anti coïncidence alors l'association des 2 lames $\frac{\lambda}{4}$ n'introduit aucun retard et donc tout se passe comme s'il n'y avait aucune lame.
- Tourner (P) de $\alpha = 20°$:

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos(\alpha)\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y + E_0 \sin(\alpha)\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z \tag{204}$$

- Si, pour rétablir l'extinction, il faut tourner (A) de :
  - $-\alpha$, alors il s'agit d'une coïncidence (en bleu) : la lame $\frac{\lambda}{2}$ transforme $\vec{E}$ en son symétrique par rapport à l'axe rapide ;

$$\vec{E}_2 = E_0 \cos(\alpha)\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y - E_0 \sin(\alpha)\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z \tag{205}$$

  - $+\alpha$, alors il s'agit d'une anticoïncidence (en rouge).

6.4.3 Expériences :

Lame $\frac{\lambda}{2}$:

- Placer le polariseur (P) puis la lame $\frac{\lambda}{2}$ orientée d'une façon quelconque. On a une (PR) transformée en une (PR) symétrique par rapport à l'axe rapide. On la met en évidence en obtenant l'extinction ($I_{min} = 0$) par rotation de (A).

Lame $\frac{\lambda}{4}$:

- Placer le polariseur (P) puis la lame $\frac{\lambda}{4}$ orientée d'une façon quelconque. On obtient une (PE).
- Par rotation de (A) on a une intensité variable avec absence d'extinction ($I_{min} \neq 0$).

Deux lames $\frac{\lambda}{4}$:

- Placer le polariseur (P) puis la lame $\frac{\lambda}{4}$ en plaçant ses lignes neutre à $\frac{\pi}{4}$. On obtient une (PC).
- Introduire une 2nde lame $\frac{\lambda}{4}$ orientée d'une façon quelconque. On obtient une (PR) qu'on prouve en obtenant l'extinction ($I_{min} = 0$) par rotation de (A).

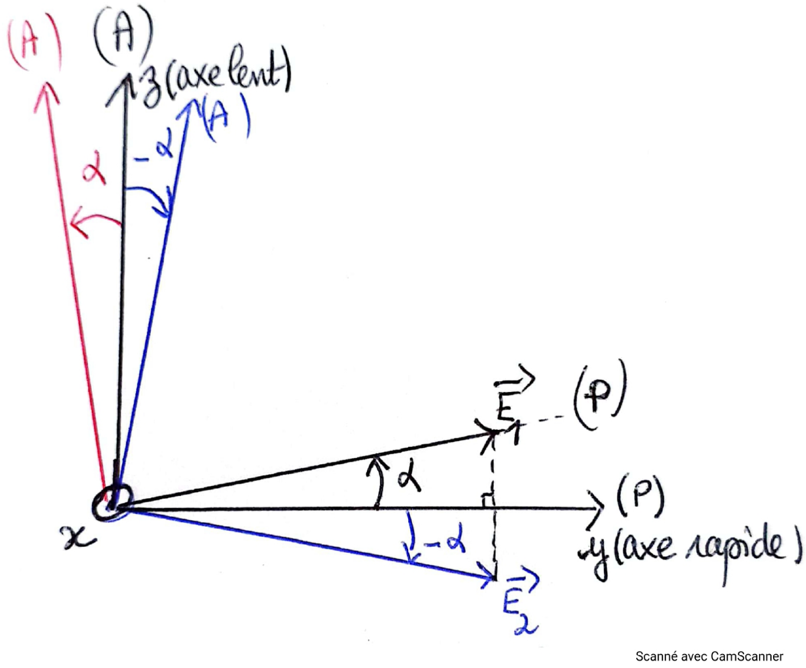


Figure 9: Identification des axes d'une lame $\lambda/4$.

7 Annexe mathématique :

L'équation paramétrique d'une ellipse est :

$$x(t) = a\cos(\omega t) \tag{206}$$
$$y(t) = b\sin(\omega t) \tag{207}$$

L'ellipse se réduit à un cercle dans le cas particulier où $a = b$.
L'équation cartésienne d'une ellipse est obtenue avec :

$$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 \tag{208}$$
$$\text{d'où : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{209}$$

Dans le cas particulier du cercle :

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{210}$$

L'équation paramétrique d'une droite est de la forme :

$$x(t) = a\cos(\omega t) \tag{211}$$
$$y(t) = b\cos(\omega t) \tag{212}$$

On en déduit l'équation cartésienne d'une droite :

$$y = \frac{b}{a}x \tag{213}$$

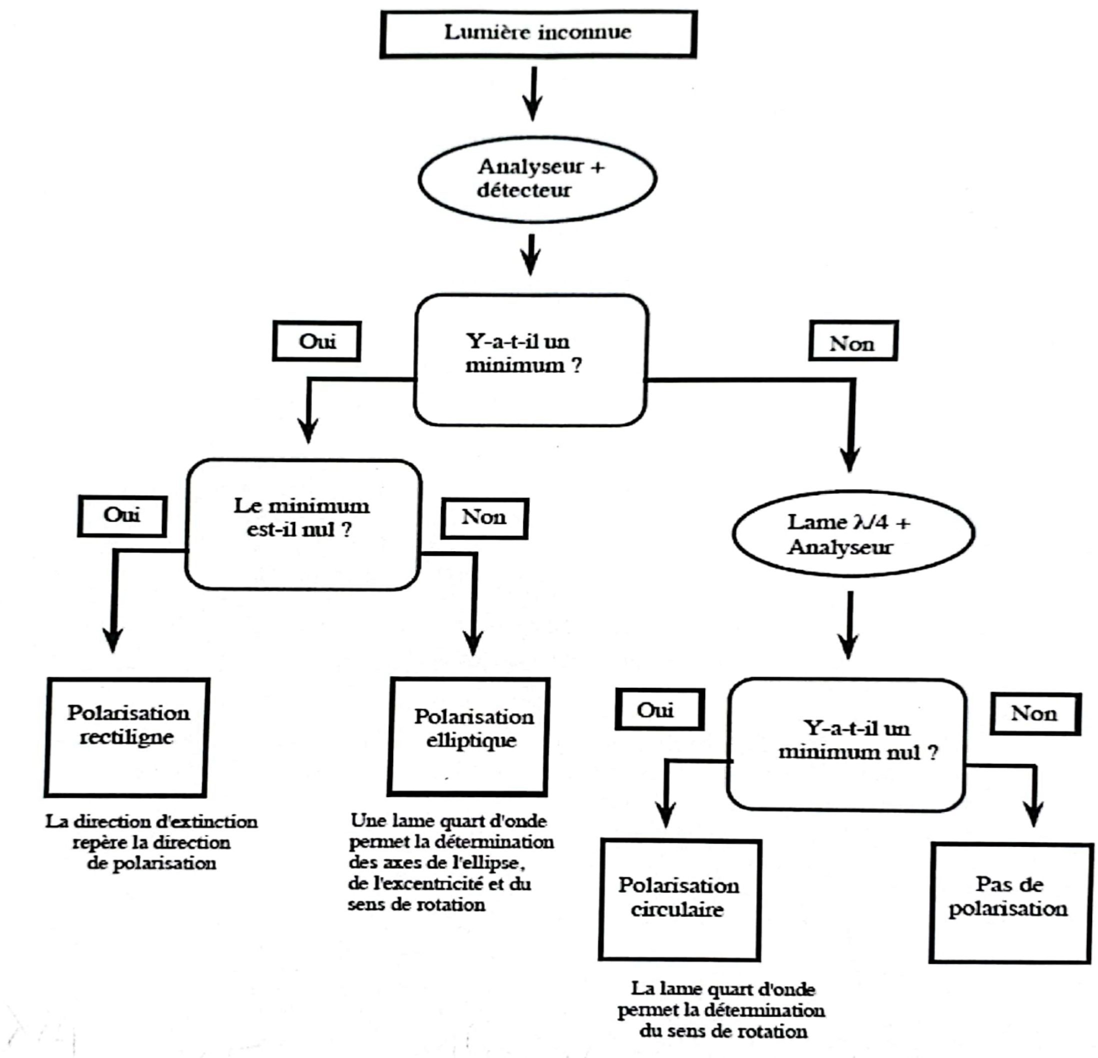


Figure 10: Analyse d'une polarisation inconnue.