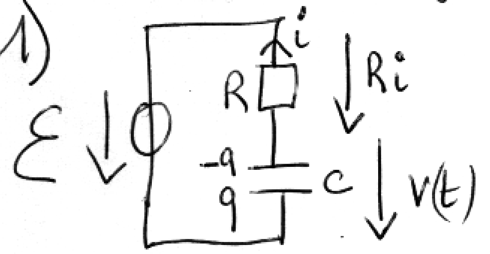
Bilan énergétique de la charge d'un condensateur

1

1)



loi des mailles : $\mathcal{E} = Ri + V(t)$ (1)

or $i = \dfrac{dq}{dt}$ et $q = CV$

d'où $i = C\dfrac{dV}{dt}$

$$\mathcal{E} = RC\frac{dV}{dt} + V$$

Posons $\tau = RC$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{\tau} = \frac{\mathcal{E}}{\tau}$$

la solution est : $V(t) = A e^{-t/\tau} + \mathcal{E}$

CI : $V(t=0) = 0$ Condensateur déchargé

d'où $A + \mathcal{E} = 0$

$\Rightarrow A = -\mathcal{E}$

$$\boxed{V(t) = \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau})}$$

. Bilan de puissance de la charge du condensateur obtenu en multipliant (1) par i : $\mathcal{E}i = Ri^2 + iV(t)$

. D'où le bilan d'énergie pendant dt :

$$\mathcal{E} i\, dt = Ri^2 dt + C\frac{dV}{dt}V dt$$

. D'où le bilan d'énergie pendant toute la charge du condensateur :

$$\underbrace{\int_0^\infty \mathcal{E} i\, dt}_{\text{énergie fournie par le générateur}} = \underbrace{\int_0^\infty Ri^2 dt}_{\text{effet Joule}} + \underbrace{\left[\frac{1}{2}CV^2\right]_{t=0}^{t\to+\infty}}_{U_c}$$

$$U_c = \frac{1}{2}CV^2(t\to+\infty) - \frac{1}{2}CV^2(t=0)$$

or $V(t\to+\infty) = \mathcal{E}$

d'où $\boxed{U_c = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2}$

2) D'après le théorème de Gauss : $\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{q(t)}{\varepsilon_0}$ P2

or $\vec{E} = \vec{0}$ à l'extérieur du condensateur.

Comme $\vec{E} = E\,\vec{u}_z$ le flux est nul à travers la surface latérale.
le flux est non nul seulement à travers le disque de surface S contenu dans le condensateur :

$$ES = \frac{q(t)}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{q(t)}{\pi a^2 \varepsilon_0}\vec{u}_z}$$

D'après le théorème d'Ampère généralisé :

MA : $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\iint_{(\mathcal{S})} \vec{rot}\,\vec{B}\cdot\vec{dS} = \mu_0 \iint_{(\mathcal{S})} \vec{j}\cdot\vec{dS} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\iint_{(\mathcal{S})} \vec{E}\cdot\vec{dS}$$

où $(\mathcal{S})$ est la surface qui s'appuie sur le contour d'Ampère $(\mathcal{C})$.

D'après le théorème de Stokes :

$$\iint_{(\mathcal{S})} \vec{rot}\,\vec{B}\cdot\vec{dS} = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{B}\cdot\vec{dl}$$

D'autre part $\iint_{(\mathcal{S})} \vec{j}\cdot\vec{dS} = I_{\text{enlacé}}$.

d'où $\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q(t)}{S\varepsilon_0}\pi r^2\right)$ avec $S = \pi a^2$

$$\int_{(\mathcal{C})} B(r;t)\cdot dl = 0 + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{r^2}{\varepsilon_0 a^2}\frac{dq}{dt}$$

$$B(r;t)\,2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{a^2}\frac{dq}{dt}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \frac{r}{2\pi a^2}\frac{dq}{dt}\vec{u}_\theta}$$

2) D'après le théorème de Gauss : $\oiint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q(t)}{\varepsilon_0}$ $\quad r^2$

or $\vec{E} = \vec{0}$ à l'extérieur du condensateur.

Comme $\vec{E} = E\,\vec{u}_z$ le flux est nul à travers la surface latérale. le flux est non nul seulement à travers le disque de surface S contenu dans le condensateur :

$$ES = \frac{q(t)}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{q(t)}{\pi a^2 \varepsilon_0}\vec{u}_z}$$

D'après le théorème d'Ampère généralisé :

MA : $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\iint_{(\mathcal{S})} \vec{rot}\,\vec{B} \cdot \vec{dS} = \mu_0 \iint_{(\mathcal{S})} \vec{j} \cdot \vec{dS} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(\mathcal{S})} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

où $(\mathcal{S})$ est la surface qui s'appuie sur le contour d'Ampère $(\mathcal{E})$.

D'après le théorème de Stokes :

$$\iint_{(\mathcal{S})} \vec{rot}\,\vec{B} \cdot \vec{dS} = \oint_{(\mathcal{E})} \vec{B} \cdot \vec{dl}$$

D'autre part $\iint_{(\mathcal{S})} \vec{j} \cdot \vec{dS} = I_{\text{enlacé}}$.

d'où $\oint_{(\mathcal{E})} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q(t)}{S\varepsilon_0}\pi r^2\right)$ avec $S = \pi a^2$

$$\int_{(\mathcal{E})} B(r;t) \cdot dl = 0 + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{r^2}{\varepsilon_0 a^2}\frac{dq}{dt}$$

$$B(r;t)\,2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{a^2}\frac{dq}{dt}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \frac{r}{2\pi a^2}\frac{dq}{dt}\vec{u}_\theta}$$

En intégrant :

$$\int_{t=0}^{t\to+\infty} dU_{em} = \int_{t=0}^{t\to\infty} \mathcal{P}\,dt$$

$$U_{em}(t\to+\infty) - \underbrace{U_{em}(t=0)}_{=0} = \int_{q(0)}^{q(t\to+\infty)} \frac{q}{C}\,dq \quad \text{car } \dot{q}\,dt = dq.$$

$$U_{em}(t\to+\infty) = \frac{1}{2C}\left[q^2(t\to+\infty) - q^2(t=0)\right]$$

or $q(t) = C\,V(t)$

$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$q(t\to+\infty) = C\mathcal{E}$$

$$q(t=0) = 0.$$

$$\boxed{U_{em}(t\to+\infty) = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2}$$

4) $u_{em}(t) = \dfrac{B^2}{2\mu_0} + \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$

- Avant la charge $\dot{q}(t) = 0$ donc $B = 0$ et $E = 0$ car $q(t) = 0$.
- A la fin de la charge : $\dot{q}(t) = 0$ donc $B = 0$, et $E = \dfrac{q(t\to+\infty)}{\pi a^2 \varepsilon_0} = \dfrac{\mathcal{E}C}{\pi a^2 \varepsilon_0}$.

$$U_{em} = \iiint_{(V)} u_{em}(t\to+\infty)\,d\tau = \left(\frac{C\mathcal{E}}{\pi a^2 \varepsilon_0}\right)^2 \frac{\varepsilon_0}{2} Se$$ où Se est le volume total.

$$U_{em} = \frac{C^2\mathcal{E}^2 e}{S\varepsilon_0 2}$$

$$U_{em} = \frac{e^2\mathcal{E}^2}{2C} \qquad \boxed{U_{em} = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2}$$

5) MF : $\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Or $\vec{E}$ uniforme dans le condensateur donc $\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$

Or $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 r \dot{q}}{2\pi a^2}\,\vec{u_\theta}$

d'où $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \dfrac{\mu_0 r \ddot{q}}{2\pi a^2}\,\vec{u_\theta}$ à r fixe !

Or $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ d'après MF

d'où $\boxed{\ddot{q} = 0}$