

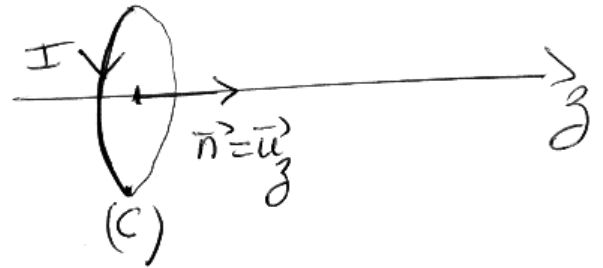
# Bilan énergétique d'un solénoïde dans l'ARQS

1) A l'intérieur du solénoïde :

$$\vec{B} = \frac{N}{l} \mu_0 I(t) \vec{u}_z$$

D'après MF,  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\text{soit } \text{rot } \vec{E} = -\frac{N}{l} \mu_0 \frac{dI}{dt} \vec{u}_z$$



D'après le théorème de Stokes :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

où le contour fermé (C) est le cercle d'axe ( $Oz$ ) de rayon  $r < a$  et (S) le disque de rayon  $r$ .

$$\oint_{(C)} E_{\theta}(r) \vec{u}_{\theta} \cdot d\vec{l} = -\frac{N}{l} \mu_0 \frac{dI}{dt} \iint_{(S)} dS$$

$$E_{\theta}(r) \oint dl = -\frac{N}{l} \mu_0 \frac{dI}{dt} \pi r^2$$

$$E_{\theta}(r) 2\pi r = -\frac{N}{l} \mu_0 \frac{dI}{dt} \pi r^2$$

$$\vec{E}(r, t) = -\frac{N}{l} \mu_0 \frac{dI}{dt} r \vec{u}_{\theta}$$

2) le vecteur de Poynting est défini par :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{R} = -\left(\frac{N\mu_0}{l}\right)^2 \frac{I \dot{I} r}{2\mu_0} \vec{u}_{\theta} \wedge \vec{u}_z$$

$$\vec{R} = -\left(\frac{\mu_0 N}{l}\right)^2 \frac{I \dot{I} r}{2\mu_0} \vec{u}_r$$

$$P_{em} = \iint_{(\Sigma)} \vec{R} \cdot d\vec{S} \quad \text{où } (\Sigma) \text{ est la surface latérale du solénoïde orientée dans le sens entrant, i.e. } -\vec{u}_r$$

sur  $(\Sigma)$ ,  $r=a$

$$P_{em} = \left(\frac{\mu_0 N}{l}\right)^2 \frac{I \dot{I}}{\mu_0} \frac{a}{2} 2\pi a l$$

$$P_{em} = \left(\frac{\mu_0 N}{l}\right)^2 \frac{I \dot{I}}{\mu_0} \pi l a^2$$

$$P_{em} = \frac{\mu_0 N^2}{l} I \dot{I} \pi a^2$$

3)  $U_m = \iiint_{(V)} u_{em} dt$  où  $(V)$  est le volume du solénoïde, ✓  
 où  $u_{em}$  désigne la densité volumique d'énergie magnétique.

$$u_{em} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$U_m = u_{em} V$  car  $u_{em}$  est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

$$U_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi a^2 l$$

$$U_m = \left(\frac{N}{l}\right)^2 \frac{\mu_0 I^2}{2} \pi a^2 l$$

$$U_m = \frac{(N I a)^2}{l} \frac{\mu_0 \pi}{2}$$

$$\frac{dU_m}{dt} = \frac{N^2 a^2}{l} \mu_0 \pi I \dot{I}$$

$$\boxed{\frac{dU_m}{dt} = P_{em}}$$

L'équation locale de Poynting est:

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} - \text{div}(\vec{R}) = \frac{\partial u_{em}}{\partial t}$$

or  $\vec{j} = \vec{0}$  si  $r < a$ : le milieu n'est pas conducteur (à l'intérieur du solénoïde)

D'autre part dans l'AQS magnétique:

$$u_{em} \approx \frac{B^2}{2\mu_0} \text{ car } \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \ll \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\text{d'où } -\text{div}(\vec{R}) \approx \frac{\partial u_{em}}{\partial t}$$

Par intégration on obtient  $\frac{dU_m}{dt} = P_{em}$