Champ créé par émission de charges (Oral Mines-Ponts)

1

1) A t il n'y a aucune charge dans la zone $z > vt$ car les charges se déplacent à $v\vec{u}_z$.

D'où $\boxed{\rho(M;t) = 0 \text{ et } \vec{j}(M;t) = \vec{0}}$

2) . $dz = v\,dt$ d'où $\boxed{dt = \frac{dz}{v}}$ durée pendant laquelle les charges ont été émises.

. les charges émises pendant dt par ($dS = dx\,dy$) l'élément de surface de la plaque sont contenues dans le parallélépipède de section dS et de hauteur $2dz$. En effet les charges sont émises symétriquement à la plaque $z=0$:

$$q\,\delta^2 N = 2\rho\,dx\,dy\,dz$$

$$q\alpha\,dt\,dx\,dy = 2\rho\,dx\,dy\,dz$$

d'où $\rho = \frac{\alpha q}{2}\frac{dt}{dz}$

or $\frac{dt}{dz} = \frac{1}{v}$ d'où $\boxed{\rho = \frac{\alpha q}{2v}}$ si $0 < z < vt$ et si $-vt < z < 0$

D'où $\vec{j} = \rho\vec{v}$ $\boxed{\vec{j} = \pm\frac{\alpha q}{2}\vec{u}_z}$ + si $0 < z < vt$; − si $-vt < z < 0$

3) $\sigma = -q\int^t \frac{\delta^2 N}{dS} = -q\alpha\int_0^t dt$

$\boxed{\sigma = -q\alpha t}$

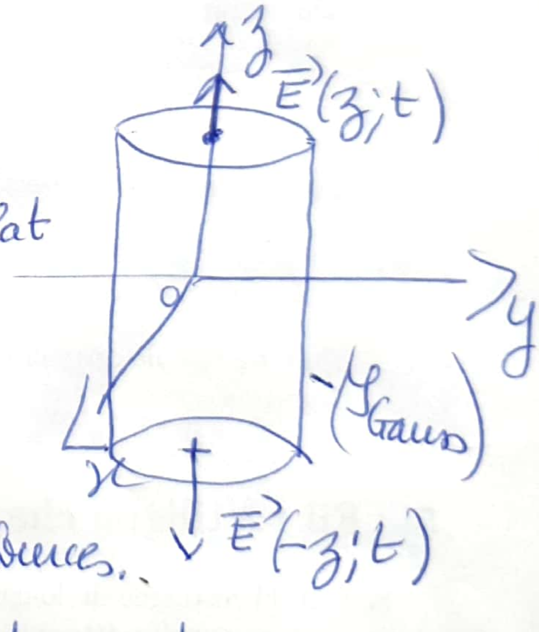
Scanné avec CamScanner

4) • Analyse des symétries des sources :

- les plans $(M; \vec{u_x}; \vec{u_z})$ et $(M; \vec{u_y}; \vec{u_z})$ sont $\perp$ à la plaque. Ce sont des plans de symétries de sources.
Donc $\vec{E}(M;t) = E(x;y;z;t)\vec{u_z}$ car $\vec{E}(M)$ est à l'intersection de ces 2 plans.
$\vec{B}(M;t)$ est ORthogonal à ces deux plans donc
$\boxed{\vec{B}(M;t) = \vec{0}}$

• les sources sont invariantes par translation le long de $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$ donc : $\vec{E}(M;t) = E(z;t)\vec{u_z}$.

• D'après le théorème de Gauss appliqué au cylindre (S_{Gauss}) d'axe (Oz) de section droite S et de hauteur $2z$ avec $0 < z < vt$:



$$\phi = \oiint_{(S_{Gauss})} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \phi_{sup} + \phi_{inf} + \underbrace{\phi_{lat}}_{=0}$$

d'où

$$2E(z;t)S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La plaque $(z=0)$ est un plan de symétrie des sources.
Donc $\vec{E}(-z;t) = -\vec{E}(z;t)$ d'où $\phi_{sup} = \phi_{inf}$

$$\phi = 2\phi_{sup} = 2E(z;t)S$$

D'autre part :

$$Q_{int} = \sigma S + \rho S 2z$$

$$Q_{int} = \left(-q\alpha t + \frac{\alpha q}{\cancel{2}v}\cancel{2}z\right)S = \frac{S\alpha q}{v}(-vt + z)$$

3

D'où $2E(z;t)\cancel{S} = \frac{\cancel{S}\alpha q}{v\varepsilon}(z-vt)$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(z;t) &= \frac{\alpha q}{2v\varepsilon_0}(z-vt)\vec{u}_z \\ \vec{E}(-z;t) &= \frac{\alpha q}{2v\varepsilon_0}(vt-z)\vec{u}_z \quad \text{si } 0<z<vt\end{aligned}}$$

la partie variable est une onde progressive qui se propage selon z.

Si $z>vt$ alors $Q_{int} = \sigma S + \rho S 2vt$

$Q_{int} = \left(-q\alpha t + \frac{\alpha q}{\cancel{2}\cancel{v}}\cancel{2}\cancel{v}t\right)S = 0$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(z>vt;t) &= \vec{0} \\ \vec{E}(z<-vt;t) &= \vec{0}\end{aligned}}$$

5) la densité volumique d'énergie électromagnétique est définie par :

$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ or $B=0$ et $E\neq 0$ si $-vt<z<vt$

donc $u_{em} = \frac{\cancel{\varepsilon_0}}{2}\frac{\alpha^2 q^2}{4v^2\varepsilon_0^{\cancel{2}}}(z-vt)^2 \Rightarrow \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\frac{\alpha^2 q^2}{4v\varepsilon_0}(z-vt)$

$\frac{dU_{em}}{dS} = 2\int_0^{vt}\frac{\varepsilon_0\alpha^2 q^2}{8v^2\varepsilon_0^2}(z-vt)^2 dz$ avec $dS = dx\,dy$

$\frac{dU_{em}}{dx\,dy} = \frac{\cancel{\varepsilon_0}\alpha^2 q^2}{4v^2\varepsilon_0^{\cancel{2}}}\left[\frac{(z-vt)^3}{3}\right]_0^{vt} = \frac{\alpha^2 q^2}{4v^2\varepsilon_0}\left(0 - \frac{(-vt)^3}{3}\right)$

$$\boxed{\frac{dU_{em}}{dx\,dy} = \frac{\alpha^2 q^2 (vt)^3}{v^2\varepsilon_0 12}}$$

$-\vec{j}\cdot\vec{E} = -\left(\frac{\alpha q}{2}\right)^2\frac{(z-vt)}{v\varepsilon_0}$

l'énergie du champ $E\uparrow$; les charges perdent de l'énergie. Elles en cèdent au champ E.

$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\vec{j}\cdot\vec{E} + \mathrm{div}(\vec{R})$, $\vec{R} = \vec{0}$