Faisceau d'électrons (Oral Centrale-Supélec)

1). • $\rho = n_e(-e) + n_p(+e)$ soit $\boxed{\rho = (n_p - n_e)e}$

• $\vec{j} = n_e(-e)\vec{v}$ soit $\boxed{\vec{j} = -n_e e v \vec{u}_z}$

$\vec{j} = \rho_m \vec{v}$

avec $\rho_m = -n_e e$: densité volumique de charges mobiles (les e^-).

• L'équation de conservation locale de la charge est :

$$\mathrm{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\mathrm{div}(-n_e e v \vec{u}_z) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$-n_e e v \,\mathrm{div}(\vec{u}_z) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

or $\mathrm{div}(\vec{u}_z) = \frac{\partial(1)}{\partial z} = 0$

donc $\mathrm{div}(\vec{j}) = 0$.

D'autre part :

$\rho(r) = (n_p(r) - n_e)e$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

L'équation (1) est bien vérifiée.

2) Chaque électron est soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

D'après la 2nde loi de Newton appliqué à un électron dans le référentiel lié au support considéré galiléen :

$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ en négligeant l'intéraction gravitationnelle devant l'intéraction électromagnétique.

or $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ car $\vec{v}$ est constant.

Donc $\vec{F} = \vec{0}$ soit $\boxed{\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}}$

3) $\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ d'après l'équation de (MG).

Or $\mathrm{div}(\vec{E}) = -\mathrm{div}(\vec{v} \wedge \vec{B})$

$= -\vec{B} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$

or $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ car $\vec{v} = \vec{cst}$

et $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ en régime stationnaire $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} \equiv 0\right)$

D'où $\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = \mu_0 \vec{v} \cdot \vec{j}$ or $\mu_0 \varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2}$

$\rho c^2 = \vec{v} \cdot (-n_e e \vec{v})$

$\rho c^2 = -n_e e v^2$

$(n_p - n_e)\cancel{e} = -n_e \cancel{e} \left(\dfrac{v}{c}\right)^2$

$n_e\left(\left(\dfrac{v}{c}\right)^2 - 1\right) = -n_p$

$$\boxed{n_e = \frac{n_p \,(1)}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Neutralité électrique locale si $\rho = 0$ soit $n_p = n_e$

soit $\boxed{v \ll c}$

i.e dans la limite CLASSIQUE.