Foudre en boule

1) D'après le théorème de Gauss : $\displaystyle\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

La symétrie sphérique impose que (Σ) est la sphère de centre O et de rayon $r = OM$ et que $\vec{E}(M) = E(r;t)\vec{u_r}$

$$4\pi r^2 E(r;t) = \frac{4\rho(t)}{3\varepsilon_0}\pi r^3 \quad \text{si } r \leq R$$

soit $\boxed{\vec{E}(r;t) = \frac{r\rho(t)}{3\varepsilon_0}\vec{u_r}}$ si $r \leq R$.

2) $\vec{J} = \rho\vec{v}$ où ρ est la densité volumique de charges mobiles.

or $\vec{v} = \mu\vec{E}$

d'où $\vec{J} = \rho\mu\vec{E}$

$$\vec{J} = \frac{\mu\rho^2(t)}{3\varepsilon_0} r\vec{u_r}$$

or $r\vec{u_r} = \vec{OM}$

d'où $\boxed{\vec{J}(r;t) = \frac{\mu\rho^2(t)}{3\varepsilon_0}\vec{OM}}$

Tous les plans contenant (OM) sont des plans de symétrie des courants. Donc $\vec{B}(M;t)$ est orthogonal à tous ces plans soit :

$\boxed{\vec{B}(M;t) = \vec{0}}$

3) D'après l'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{J} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\mu}{3\varepsilon_0}\rho^2(t)\operatorname{div}(\vec{OM}) = 0$$

or $\operatorname{div}(\vec{OM}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$.

d'où $\displaystyle\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\mu\rho^2(t)}{\varepsilon_0} = 0$

$$\int_{\rho_0}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\rho^2} = -\frac{\mu}{\varepsilon_0}\int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{\rho(t)} + \frac{1}{\rho_0} = -\frac{\mu t}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{\rho(t)} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{\mu t}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{\rho(t)} = \frac{1}{\rho_0}\left(1 + \frac{\mu\rho_0 t}{\varepsilon_0}\right)$$

$$\boxed{\rho(t) = \frac{\rho_0}{1 + \mu\rho_0 t/\varepsilon_0}}$$

P2

4) Conservation de la charge totale de la boule entre $t=0$ et t :

$$\frac{4}{3}\pi R^3(t)\,\rho(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3\,\rho_0$$ car la boule reste uniformément chargée à t

$$R^3(t) = R_0^3\,\frac{\rho_0}{\rho(t)}$$

$$\boxed{R(t) = R_0\left(1+\frac{\mu\rho_0}{\varepsilon_0}t\right)^{1/3}}$$

Autre façon : $v\,dt = dR$.

$$\mu E(R(t);t)\,dt = dR.$$

$$\frac{\mu R(t)\rho(t)}{3\varepsilon_0}\,dt = dR.$$

$$\frac{\mu\rho_0}{3\varepsilon_0}\int_{t=0}^{t}\frac{1}{1+\mu\rho_0\frac{t}{\varepsilon_0}}\,dt = \int_{R_0}^{R(t)}\frac{dR}{R}$$

$$\frac{\mu\rho_0}{3\varepsilon_0}\,\frac{\varepsilon_0}{\mu\rho_0}\ln\left(1+\mu\rho_0\frac{t}{\varepsilon_0}\right) = \ln\frac{R(t)}{R_0}$$

$$\ln\left(1+\mu\rho_0\frac{t}{\varepsilon_0}\right)^{1/3} = \ln\frac{R(t)}{R_0}$$

d'où $$\boxed{R(t) = R_0\left(1+\mu\rho_0\frac{t}{\varepsilon_0}\right)^{1/3}}$$