

# Dispersion absorption.

PSI.

March 25, 2024

Dans ce chapitre, on étudie la propagation des OEM dans les milieux matériels. On se limitera aux métaux et aux plasmas.

## 1 OEM dans les plasmas et les métaux

Quand on chauffe un solide, 3 transitions de phase succesives peuvent avoir lieu :

- solide  $\rightarrow$  liquide ;
- liquide  $\rightarrow$  gaz ;
- gaz  $\rightarrow$  plasma.

♡ L'état **plasma** est donc considéré comme le **4ième état de la matière**. Un plasma est un **gaz ionisé** se comportant comme un **fluide conducteur**. C'est l'état le plus représenté dans l'univers.

### 1.1 Exemples de plasma

L'ionosphère est un exemple de plasma. C'est une couche de l'atmosphère située à plus de 50 km d'altitude. Le gaz est partiellement ionisé par le rayonnement UV du Soleil. On l'assimile à un plasma peu dense, de densité d'électrons variant entre  $10^{10} \text{ m}^{-3}$  et  $10^{12} \text{ m}^{-3}$  en raison de processus d'ionisation induits par le rayonnement UV le jour, et de recombinaison électron-ion la nuit.

Un écran plasma Les écrans à plasma fonctionnent de façon similaire aux tubes d'éclairage fluorescents. Ils utilisent l'électricité pour illuminer un gaz. Le gaz utilisé est un mélange de gaz nobles (argon 90% et xénon 10%). Pour qu'il émette de la lumière on lui applique un courant électrique qui le transforme en plasma, un fluide ionisé dont les atomes ont perdu un ou plusieurs de leurs électrons et ne sont plus électriquement neutres, alors que les électrons ainsi libérés forment un nuage autour. Le gaz est contenu dans les cellules, correspondant aux sous-pixels (luminophores). Chaque cellule est adressée par une électrode ligne et une électrode colonne ; en modulant la tension appliquée entre les électrodes et la fréquence de l'excitation, il est possible de définir l'intensité lumineuse (en pratique on utilise jusqu'à 256 valeurs).

*Remarque :*

En physiologie, le plasma désigne la partie liquide du sang. Par analogie, un gaz ionisé est appelé plasma.

---

## 1.2 Conductivité d'un plasma électriquement neutre

### 1.2.1 Modèle du plasma électriquement neutre

Un plasma est un milieu peu dense (et donc proche du vide) constitué :

- d'électrons, de masse  $m_e$  et de charge  $(-e)$ , de densité volumique  $n_e$  ;
- d'ions, de masse  $M$  et de charge  $Ze$  (cas de l'ionisation totale de l'atome), de densité volumique  $n_i$  :

$$M \approx Am_p \quad (1)$$

où  $A$  est le nombre de masse et  $m_p$  la masse d'un proton.

On obtient un plasma en portant un gaz à une température  $T$  telle que l'énergie d'agitation thermique  $k_B T$  soit supérieure à l'énergie d'ionisation  $E_i$  :

$$\text{or } E_i \approx 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (2)$$

$$\text{d'où } T > \frac{E_i}{k_B} \quad (3)$$

$$\text{soit } T > \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23}} \quad (4)$$

$$T > 10^4 \text{ K} \quad (5)$$

Quand une OEM se propage dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz  $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$  engendrée par le champ électromagnétique. Comme le plasma est peu dense (très dilué), on peut supposer que le champ électromagnétique a une structure proche de celle du vide, soit :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \quad (6)$$

$$\text{soit } \frac{B}{E} = \frac{1}{c} \quad (7)$$

$$\text{d'où } \frac{\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \approx \frac{Bv}{E} \approx \frac{v}{c} \quad (8)$$

$$\text{on suppose les particules non relativistes } v \ll c \quad (9)$$

On en déduit que la **force magnétique est négligeable** devant la force électrique.

*Remarque :* Dans les plasmas très chauds, l'agitation thermique est telle que la vitesse des particules peut ne plus être négligeable devant  $c$ . Les effets relativistes doivent alors être pris en compte.

D'autre part, comparons l'accélération d'un ion avec celle d'un électron en utilisant la RFD :

$$Ma_i = \|Ze\vec{E}\| \quad (10)$$

$$\text{et } m_e a_e = \|e\vec{E}\| \quad (11)$$

$$\text{d'où } \frac{a_i}{a_e} = \frac{Zm_e}{M} \quad (12)$$

$$\text{or (1) } \frac{a_i}{a_e} = \frac{Zm_e}{Am_p} \quad (13)$$

$$\text{or } Z < A \quad (14)$$

$$\text{d'où } \frac{a_i}{a_e} < \frac{m_e}{m_p} \quad (15)$$

$$\text{or } \frac{m_p}{m_e} = 1836 \quad (16)$$

$$\text{d'où } \frac{a_i}{a_e} < 5.10^{-4} \ll 1 \quad (17)$$

Le mouvement des ions est donc négligeable et donc  $n_i$  est constant par rapport au temps. Si de plus on suppose que la distribution des ions est homogène en l'absence d'onde alors celle-ci le reste :  $n_i$  est une constante.

Le **plasma globalement neutre**. Mais on considèrera une OEM transverse qui arrive du vide en incidence normale sur le plasma et donc on aura bien dans le plasma  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  d'où  $\rho \neq 0$ . Le plasma est localement neutre en présence d'une OEM transverse.

$$\text{or } \rho = -en_e + Zen_i \quad (18)$$

$$\text{d'où } n_e(M, t) = Zn_i \quad (19)$$

La densité volumique d'électrons  $n_e$  est donc aussi constante.

$$\text{la densité de courant est définie par } \vec{j}(M, t) = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \quad (20)$$

$$\text{soit } \vec{j}(M, t) = n_e(-e)\vec{v}_e + n_i(Ze)\vec{0} \quad (21)$$

$$\vec{j}(M, t) = -n_e e \vec{v}_e(M, t) \quad (22)$$

### 1.2.2 Densité de courants

On recherche le champ  $\vec{v}_e(M, t)$ . D'après la RFD appliquée à un électron :

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} \quad (23)$$

le plasma est **dilué** et donc les interactions à courte portée (les collisions binaires coulombiennes) entre charges sont négligées. Cela revient à ce que l'énergie cinétique des particules soit très supérieure à leur énergie potentielle d'interaction électrique  $e_c/e_p \gg 1$ . C'est la même hypothèse que pour un **gaz parfait**. Un plasma vérifie donc  $PV = NRT$  et  $U = (3/2)NkBT$ . C'est pourquoi **le plasma est dit sans interaction**.

♡ Un plasma peu dense est dit sans interaction car les collisions y sont négligeables.

Au contraire, dans un métal les interactions avec les impuretés du réseau cristallin sont modélisées par une force de friction  $-m_e \frac{\vec{v}}{\tau}$ . La constante  $\tau$  est caractéristique de ces interactions.

On développe la dérivée particulaire  $\frac{d\vec{v}_e}{dt}$  :

$$\text{d'où : } m_e \left( \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_e \right) = -e \vec{E} \quad (24)$$

L'accélération convective est négligeable devant l'accélération locale car :

$$\frac{\|(\vec{v}_e \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_e\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} \right\|} \approx \frac{\frac{v_e^2}{\lambda}}{\frac{v_e}{T}} \quad (25)$$

$$\text{or } \lambda = cT \quad (26)$$

$$\frac{\|(\vec{v}_e \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_e\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} \right\|} \approx \frac{v_e}{c} \ll 1 \quad (27)$$

$$\text{On en déduit } m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e \vec{E} \quad (28)$$

$$\text{or (22) } - \frac{m_e}{en_e} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -e \vec{E} \quad (29)$$

Finalement :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{e^2 n_e}{m_e} \vec{E} \quad (30)$$

En régime sinusoïdal forcé :

$$j\omega \vec{j} = \frac{e^2 n_e}{m_e} \vec{E} \quad (31)$$

*Attention !* Ne pas confondre le nombre complexe  $j$  tel que  $j^2 = -1$  avec la densité de courant  $\vec{j}$ .

♡ La conductivité est :

- réelle pour un métal dans le domaine de validité de la loi d'Ohm :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (32)$$

- imaginaire pur pour un plasma sans collisions :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma} \vec{E} \quad (33)$$

Dans un plasma sans collisions :

$$\boxed{\sigma = \frac{e^2 n_e}{j \omega m_e}} \quad (34)$$

On introduit une conductivité complexe en faisant une analogie avec la loi d'Ohm locale.

### 1.2.3 Interprétation énergétique

$$\frac{\vec{j}}{\vec{E}} = -j \frac{e^2 n_e}{\omega m_e} \quad (35)$$

$$\arg\left(\frac{\vec{j}}{\vec{E}}\right) = \arg(-j) \quad (36)$$

$$\arg\left(\frac{\vec{j}}{\vec{E}}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (37)$$

$$\text{d'où } \vec{j}(M, t) = \vec{j}_0 \cos\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right) \quad (38)$$

$$\text{soit } \vec{j}(M, t) = \vec{j}_0 \sin(\omega t - kx) \quad (39)$$

$$\text{et } \vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx) \quad (40)$$

$$\text{or } \langle \cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx) \rangle = 0 \quad (41)$$

♡ Un plasma sans collisions n'absorbe pas les OEM : il n'y a **pas d'effet Joule** car la puissance moyenne transférée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges est nulle. En effet :

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0 \quad (42)$$

$$\text{soit } \langle \frac{d\mathcal{P}_{\text{champ} \rightarrow \text{porteurs}}}{d\tau} \rangle = 0 \quad (43)$$

## 1.3 OEM dans un plasma ou un métal :

### 1.3.1 Structure des OEM

Les équations de Maxwell étant linéaires, elles s'écrivent en complexe :

$$\text{MG } \text{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (44)$$

$$\text{MF } \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (45)$$

$$\text{M}\phi \text{ div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (46)$$

$$\text{MA } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (47)$$

D'autre part, le plasma ou le métal reste localement neutre (??) et est caractérisé par la loi (33).

On cherche des solutions de la forme OPPH c'est-à-dire un champ électromagnétique de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp(j\omega t - j\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (48)$$

$$\text{et } \vec{B}(M, t) = \vec{B}_0 \exp(j\omega t - j\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (49)$$

Ainsi :

$$\vec{\nabla} = -j\vec{k} = -jk\vec{u} \quad (50)$$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial t} = j\omega \quad (51)$$

Les équations de Maxwell donnent :

$$\text{MG} - jk\vec{u} \cdot \vec{E} = 0 \quad (52)$$

$$\text{MF} - jk\vec{u} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (53)$$

$$\text{M}\phi - jk\vec{u} \cdot \vec{B} = 0 \quad (54)$$

$$\text{MA} - jk\vec{u} \wedge \vec{B} = \mu_0 \underline{\sigma} \vec{E} + \varepsilon_0 \mu_0 j\omega \vec{E} \quad (55)$$

♡ Les équations scalaires Maxwell-Gauss (MG) et Maxwell-flux (M $\phi$ ) montrent que le **champ électromagnétique est transversal** :

$$\vec{E} \perp \vec{u} \quad (56)$$

$$\text{et } \vec{B} \perp \vec{u} \quad (57)$$

De l'équation de Maxwell-Faraday (MF), on a :

$$\vec{B} = \frac{k\vec{u} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad (58)$$

### 1.3.2 Relation de dispersion

D'après MA et (58) :

$$-j \frac{k^2}{\omega} \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E}) = (\mu_0 \underline{\sigma} + \varepsilon_0 \mu_0 j\omega) \vec{E} \quad (59)$$

$$\text{or } \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E}) = (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u}) \vec{E} \quad (60)$$

$$\text{or (56) d'où } \vec{u} \cdot \vec{E} = 0 \quad (61)$$

$$\text{d'où } \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E}) = -\vec{E} \quad (62)$$

$$-\frac{k^2}{j\omega} \vec{E} = (\mu_0 \underline{\sigma} + \varepsilon_0 \mu_0 j\omega) \vec{E} \quad (63)$$

La relation de dispersion du milieu (plasma ou métal) est la suivante :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 j \omega \sigma} \quad (64)$$

$$\text{Posons } \underline{k} = k' + jk'' \quad (65)$$

$$\text{or les champs sont de la forme } \underline{A}(M, t) = A_M \exp(j\omega t - j\underline{k}x - j\varphi) \quad (66)$$

$$\text{d'où } \underline{A}(M, t) = A_M \exp(j\omega t - j(k' + jk'')x - j\varphi) \quad (67)$$

$$\underline{A}(M, t) = A_M \exp(-j\varphi) \exp(k''x) \exp(j\omega t - jk'x) \quad (68)$$

$$\text{or le champ réel est } A(M, t) = \text{Re}(\underline{A}(M, t)) \quad (69)$$

Les champs sont de la forme :

$$A(M, t) = A_M \exp(k''x) \cos(\omega t - k'x - \varphi) \quad (70)$$

### 1.3.3 Vitesse de phase

♡ La partie réelle de  $k$  donne le terme  $\cos(\omega t - k'x - \varphi)$  identique à une OPPH. D'où la **vitesse de phase** :

$$v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k'(\omega)} \quad (71)$$

$$\text{en posant } \underline{k} = k' + jk'' \quad (72)$$

A priori  $v_\varphi$  dépend de  $\omega$  et donc **le milieu est dispersif**.

### 1.3.4 Absorption

Selon le signe de  $k''$  et le sens de propagation, le terme  $\exp(k''x)$  correspond soit à une amplification (cas du LASER) soit à un amortissement.

♡ Dans un **milieu absorbant** il y a amortissement dans le sens de propagation avec une **distance caractéristique** :

$$\delta = \frac{1}{|k''|} \quad (73)$$

### 1.3.5 Indice complexe

♡ L'**indice complexe** d'un milieu pour les OEM est défini par :

$$\underline{k} = \frac{n\omega}{c} \quad (74)$$

$$\text{avec } \underline{n} = n' + jn'' \quad (75)$$

$$\text{d'où (58) } \underline{\vec{B}} = \frac{n\vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}}{c} \quad (76)$$

L'**indice d'absorption**  $n''$  est la partie imaginaire de  $\underline{n}$ .

Dans un **milieu transparent**, nous admettrons que  $\underline{n}$  s'identifie avec l'**indice optique** :

$$n' = n = \frac{c}{v} \quad (77)$$

$$n'' = 0 \quad (78)$$

$$A(M, t) = A_M \exp\left(n'' \frac{\omega x}{c}\right) \cos\left(\omega t - n' \frac{\omega x}{c} - \varphi\right) \quad (79)$$

$$\text{soit : } \phi = n' \frac{\omega x}{c} = kn'x = \frac{2\pi}{\lambda} n'x \quad (80)$$

$\phi$  est le retard de phase introduit par la différence de chemin  $n'x$  parcouru.

♡ Dans un **milieu transparent i.e non absorbant**  $v = \frac{c}{n}$  représente une vitesse de phase puisque :

$$v_\varphi = \frac{c}{n'} \quad (81)$$

On admettra que dans les **milieux diélectriques tels que l'air, le verre ou l'eau**, comme dans les plasmas et les métaux, on peut définir un indice complexe. Et donc la relation de structure (58) y est validée.

## 1.4 OEM dans les plasmas

### 1.4.1 Pulsation plasma

La pulsation plasma  $\omega_p$  délimite deux cas :  $k$  réel et  $k$  imaginaire pur. Exprimons  $\omega_p$  en exploitant la relation de dispersion (64) et (34) :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \frac{e^2 n_e}{m_e} \quad (82)$$

$$k^2 = \frac{1}{c^2} \left( \omega^2 - \frac{\mu_0 c^2 e^2 n_e}{m_e} \right) \quad (83)$$

$$\text{or } \mu_0 c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \quad (84)$$

$$k^2 = \frac{1}{c^2} \left( \omega^2 - \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e} \right) \quad (85)$$

d'où :

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}}} \quad (86)$$



♡ La **pulsation plasma**  $\omega_p$  est la **pulsation de coupure** du plasma définie par :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (87)$$

$$\text{Domaine de transparence si } k \text{ réel si } k^2 > 0 \text{ soit } \omega > \omega_p \quad (88)$$

$$\text{Domaine réactif si } \underline{k} \text{ imaginaire pur si } \underline{k}^2 < 0 \text{ soit } \omega < \omega_p \quad (89)$$

$$(90)$$

#### 1.4.2 Domaine de transparence

Dans le domaine de transparence du plasma, le plasma n'est pas absorbant :

$$k'' = 0 \quad (91)$$

$$\underline{k} = k' = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \quad (92)$$

$$\text{la vitesse de phase est } v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)} = c \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2}} \quad (93)$$

$$\text{or (74) } n = \frac{ck}{\omega} \quad (94)$$

$$\text{soit } n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (95)$$

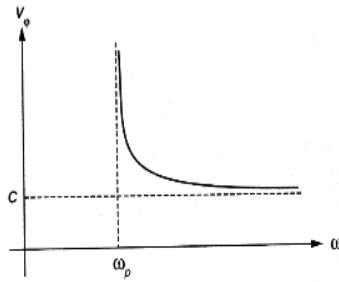


Figure 1: Vitesse de phase des ondes progressives.

**En HF  $\omega > \omega_p$ , la propagation d'une OPPH sans atténuation ni amplification est possible. Le plasma est transparent (non absorbant) et dispersif :**

$$v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad (96)$$

$$\text{avec } v_\varphi > c \quad (97)$$

$$\text{et } n(\omega) = \frac{c}{v_\varphi(\omega)} < 1 \quad (98)$$

La vitesse de phase est la vitesse du plan de phase, objet non matériel, purement mathématique. Et donc ce résultat n'est pas en contradiction avec la **théorie de la relativité restreinte** qui dit que :

$$v < c \quad (99)$$

En très HF  $\omega \gg \omega_p$ , le plasma devient non dispersif et se comporte comme le vide :

$$k \rightarrow \frac{\omega}{c} \quad (100)$$

Les électrons n'interagissent plus avec le champ  $\vec{E}$  car ils ne suivent plus ses oscillations.

### 1.4.3 Cas des ondes évanescentes

Dans le domaine réactif du plasma,  $k$  est imaginaire pur car  $\omega < \omega_p$  :

$$\underline{k}^2 = -\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} < 0 \quad (101)$$

$$\underline{k}^2 = j^2 \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} \quad (102)$$

$$\underline{k}^2 = (jk'')^2 = -k''^2 \quad (103)$$

$$\text{et } k' = 0 \quad (104)$$

$$\text{or (73) } k''^2 = \frac{1}{\delta^2} \quad (105)$$

$$k'' = \pm \frac{1}{\delta} \quad (106)$$

Il en résulte une onde de la forme :

$$A(M, t) = A_M \exp(k''x) \cos(\omega t + \varphi) \quad (107)$$

L'onde est dite **évanescence** car elle est atténuée :

- selon  $+\vec{u}_x$  si  $k'' < 0$  ;
- selon  $-\vec{u}_x$  si  $k'' > 0$ .

On remarque que les variations spatiales et temporelles sont factorisées, comme avec une **onde stationnaire**. Mais, une onde évanescente ne présente pas de nœuds et de ventre à cause de  $\exp(k''x)$ .

La relation de structure (58) donne :

$$\vec{B} = \frac{jk''\vec{u} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad (108)$$

On constate que  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vibrent en quadrature de phase :  $\vec{E}$  vibre en  $\cos(\omega t - \psi)$  et  $\vec{B}$  vibre en  $\cos(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}) = \sin(\omega t - \psi)$ . Par conséquent la moyenne temporelle du vecteur de Poynting est nulle car :

$$< \cos(\omega t - \psi) \sin(\omega t - \psi) > = 0 \quad (109)$$

♡ Dans le **domaine réactif**,  $\omega < \omega_p$ , le plasma est la siège d'une **onde évanescence** qui ne se propage pas. C'est une **onde stationnaire amortie** qui **ne transporte en moyenne aucune énergie électromagnétique**.

En conclusion, une OemPPH ne peut se propager dans le plasma que si  $\omega > \omega_p$ . **Le plasma constitue donc un filtre passe-haut.**

## 1.5 Effet de peau dans les conducteurs ohmiques

### 1.5.1 Rappel

Avec le modèle de Drude où les collisions des électrons avec le réseau sont modélisées par une force de friction  $\vec{f} = -m\frac{\vec{v}}{\tau}$ , nous avons obtenu l'expression de la conductivité  $\sigma$  d'un conducteur ohmique soumis à un champ  $\vec{E}$  :

- uniforme et stationnaire :

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m_e} \quad (110)$$

$$\text{avec pour le cuivre } \tau \approx 10^{-14} \text{ s} \quad (111)$$

$$\text{et } \sigma_0 \approx 10^8 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \quad (112)$$

- variable :

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau} \quad (113)$$

$$\text{d'où la conductivité est réelle } \underline{\sigma} \approx \sigma_0 \quad (114)$$

$$\text{si } f \ll \frac{1}{2\pi\tau} = f_M \quad (115)$$

$$\text{soit } f \ll 10^{14} \text{ Hz} \quad (116)$$

### 1.5.2 Relation de dispersion

Or un conducteur ohmique est un milieu localement neutre ( $\rho = 0$ ) où la relation de dispersion est (64). Comparons les deux termes dans le cas où  $\sigma$  est réelle :

$$\frac{\frac{\omega^2}{c^2}}{\mu_0\sigma\omega} = \frac{2\pi f}{\mu_0 c^2 \sigma} \quad (117)$$

$$\text{or } f < f_M \quad (118)$$

$$\text{pour le cuivre } \frac{\frac{\omega^2}{c^2}}{\mu_0\sigma\omega} < \frac{2\pi \cdot 10^{14}}{4\pi \cdot 10^{-7} (3 \cdot 10^8)^2 10^8} \quad (119)$$

$$\frac{\frac{\omega^2}{c^2}}{\mu_0\sigma\omega} < 6 \cdot 10^{-5} \quad (120)$$

On en déduit que dans le domaine d'utilisation du conducteur ohmique  $f < f_M$ , la relation de dispersion s'écrit :

$$\underline{k}^2 = -j\mu_0\sigma\omega \quad (121)$$

$$\text{soit } \underline{k}^2 = \mu_0\sigma\omega \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) \quad (122)$$

$$\text{d'où } \underline{k} = \pm\sqrt{\mu_0\sigma\omega} \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right) \quad (123)$$

$$\text{soit } \underline{k} = \pm\frac{(1-j)}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\sigma\omega} \quad (124)$$

$$\underline{k} = \pm\frac{(1-j)}{\delta} = k' + jk'' \quad (125)$$

$$\text{d'où } |k'| = |k''| = \frac{1}{\delta} \quad (126)$$

### 1.5.3 Effet de peau

On considère une propagation du champ électromagnétique dans le demi-espace infini  $x > 0$  dans le sens des  $x$  croissants. La seule solution acceptable est celle qui ne diverge pas (cas du signe  $+$ ) :

$$a(M, t) = A_M \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi\right) \quad (127)$$

$$\text{obtenue pour } k' + jk'' = \frac{1}{\delta} - \frac{j}{\delta} \quad (128)$$

♡ On appelle **effet de peau** le phénomène par lequel **une onde électromagnétique ne pénètre dans un conducteur ohmique qu'au voisinage de sa surface**. Elle est atténuée sur une distance  $\delta$  appelée **épaisseur de peau** qui représente aussi l'**échelle de la propagation** :

$$\delta = \frac{1}{|k''|} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} \quad (129)$$

♡ Pour le cuivre :

$$\text{à : } f = 50\text{Hz} \quad (130)$$

$$\delta = 7\text{mm} \quad (131)$$

$$\text{car } \sigma = 10^8\Omega^{-1}\text{m}^{-1} \quad (132)$$

Dans les fils électriques en cuivre dont l'épaisseur est de l'ordre du mm, les courants se répartissent donc uniformément.

En effet :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^8 \cdot 2\pi \cdot 50}} \quad (133)$$

$$\text{mais à } f = 5\text{GHz} = 5 \cdot 10^9\text{Hz} \quad \delta = 0,7\text{mm} \quad (134)$$

Plus le métal est conducteur ( $\sigma$  élevé) et plus la fréquence  $f$  de OEM est grande plus l'épaisseur de peau  $\delta$  est faible.

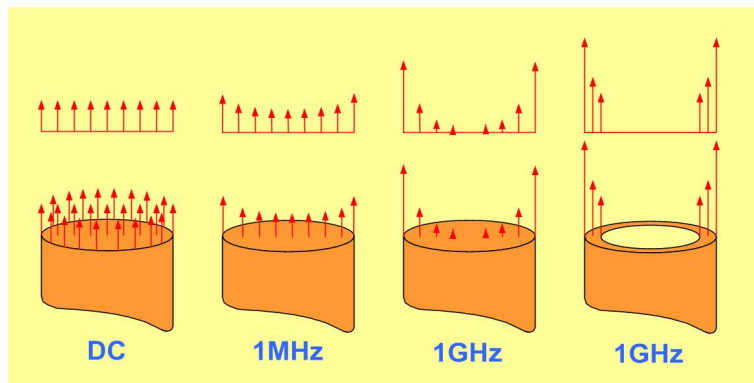
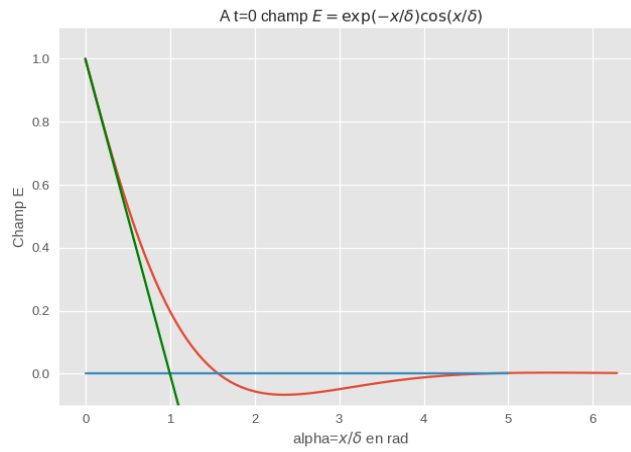


Figure 2: Effet de peau en fonction de la fréquence.

♡ Le **conducteur parfait** est le cas limite pour lequel les OEM ne pénètrent pas. L'effet de peau y est négligeable :

$$\delta \rightarrow 0 \quad (135)$$

$$\text{avec } \omega \neq 0 \text{ d'où } \sigma \rightarrow \infty \quad (136)$$

$$\vec{E}_{int} = \vec{0} \quad (137)$$

$$\vec{B}_{int} = \vec{0} \quad (138)$$

Les courants  $\vec{j}$  et les charges  $\rho$  ne peuvent être que surfaciques.

D'après (MF),  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  génère  $\vec{E}$  et donc induit des courants (de Foucault) dans le conducteur. Ces courants créent un champ magnétique propre (autoinduction) dont l'effet est de s'opposer aux variations de  $\vec{B}$  d'après la loi de modulation de Lenz. Ce champ propre n'est pas du tout négligeable au-delà de  $\delta$ . En DC (régime permanent continu) il n'y a pas d'autoinduction.

#### 1.5.4 Caractère diffusif de l'effet de peau

D'après la relation de dispersion (121) :

$$(-jk)^2 = \mu_0 \sigma j \omega \quad (139)$$

$$(-jk)^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma j \omega \vec{E} \quad (140)$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (141)$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (142)$$

$$\text{posons } D = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \quad (143)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{DT}{\pi}} \quad (144)$$

$$\delta \approx \sqrt{DT} \quad (145)$$

Une autre façon d'établir l'équation de diffusion est de revenir aux équations de Maxwell dans le conducteur dans l'ARQS :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \sigma_0 \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (146)$$

$$\text{d'où } \vec{\text{rot}} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{0} \quad (147)$$

$$\text{or (MF) d'où } \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (148)$$

$$\vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \vec{\Delta} \vec{E} = -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (149)$$

$$\text{or (MG) d'où } \vec{0} - \vec{\Delta} \vec{E} = -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (150)$$

♥ On reconnaît une **équation de diffusion** analogue à une équation de diffusion thermique :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{D} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (151)$$

$$\Delta T - \frac{1}{D_{th}} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (152)$$

**L'effet de peau est plutôt un phénomène diffusif** qu'un phénomène de propagation.

$$\heartsuit T \approx \frac{\delta^2}{D} \quad (153)$$

Les phénomènes diffusifs présentent une **dissymétrie de comportement entre l'espace et le temps** : ils ne sont efficaces qu'à petite échelle spatiale.

### 1.5.5 Limitation de l'effet de peau

L'effet de peau est en général nuisible car il augmente la résistance et donc les pertes par effet Joule en diminuant la section  $S$  traversée par le courant ( $R = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S}$ ).

Les méthodes pour diminuer l'effet de peau sont les suivantes :

- diviser le conducteur en plusieurs conducteurs associés en parallèle et isolés entre eux, chaque "brin" ayant un rayon inférieur à  $\delta$ .
- plaquer le conducteur avec de l'argent (métal qui possède la plus grande conductivité). La composante continue du courant circule dans tout le volume et la composante alternative HF ne circule que dans la pellicule d'argent.
- adopter une géométrie tubulaire : l'épaisseur du tube creux est de l'ordre de  $\delta$ .

### 1.5.6 Aspect énergétique :

Le vecteur de Poynting est défini par :

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (154)$$

$$\text{Or la relation de structure est } \underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} \quad (155)$$

$$\text{or } \underline{k} = \frac{1-j}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\delta} \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right) \quad (156)$$

$$\text{d'où } \underline{\vec{B}} = \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right) \frac{\underline{\vec{u}}_x \wedge \underline{\vec{E}}}{\delta\omega} \quad (157)$$

$$\text{d'où } \arg\left(\frac{\underline{B}}{\underline{E}}\right) = -\frac{\pi}{4} \neq \pm\frac{\pi}{2} \quad (158)$$

$$\text{donc } < \|\vec{\mathcal{R}}\| > \neq 0 \quad (159)$$

D'autre part, la puissance moyenne fournie par le champ électromagnétique aux porteurs de charge est positive :

$$< \vec{j} \cdot \vec{E} > = \sigma < E^2 > \quad (160)$$

L'amortissement de l'OEM :

- est dû au transfert de puissance du champ électromagnétique vers les porteurs de charge.
- provoque l'effet Joule.

## 2 Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu peu dispersif et non absorbant

Par exemple, un plasma en HF est faiblement dispersif et non absorbant.

### 2.1 Notion de paquet d'ondes

Un signal physique réel  $f_0(t)$  émis par une source et destiné à propager une information a une extension temporelle  $\Delta t = \tau$  et une extension spatiale  $\Delta x$  limitées (finies).

Pour étudier un signal réel, on utilise la transformée de Fourier, qui est essentiellement une projection du signal sur la base continue que sont les OPPH, restreinte aux OPPH qui vérifient

la relation de dispersion. Ensuite, par linéarité, on fait évoluer indépendamment chaque OPPH et on obtient l'évolution du signal.

**Lors d'un changement de milieu c'est la pulsation  $\omega$  qui se conserve** et non pas  $k$ . C'est pourquoi on choisit de décomposer le signal dans l'espace des  $\omega$  plutôt que dans l'espace des  $k$ .

D'après l'analyse de Fourier dans l'espace des  $\omega$  les composantes de Fourier du signal réel occupent une largeur spectrale  $\Delta\omega$  centrée sur  $\omega_0$  tel que :

♡ La **relation de Fourier** :

$$\tau\Delta\omega \approx 1 \quad (161)$$

$$\text{ou } \tau\Delta\omega \approx 2\pi \quad (162)$$

$$\text{avec la pulsation moyenne } \omega_0 \gg \Delta\omega \quad (163)$$

De même dans l'espace des  $k$  les composantes de Fourier occupent une largeur spectrale  $\Delta k$  centrée sur  $k_0$  tel que :

$$\Delta x\Delta k \approx 1 \quad (164)$$

$$\text{ou } \Delta x\Delta k \approx 2\pi \quad (165)$$

$$\text{avec la pulsation moyenne } k_0 \gg \Delta k \quad (166)$$

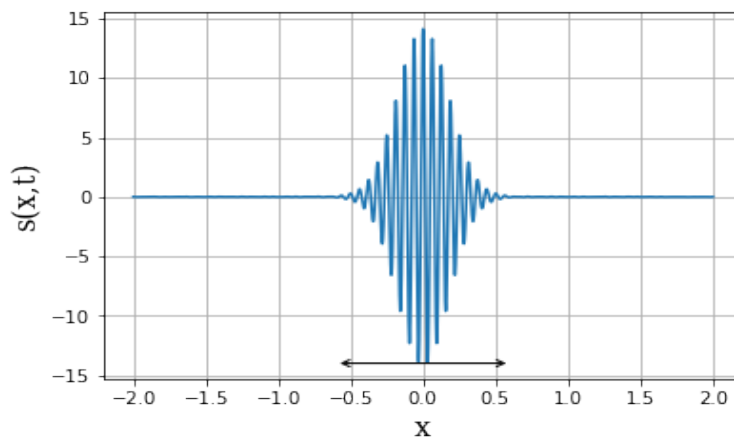


Figure 3: Paquet d'ondes avec une enveloppe gaussienne.

En HF, le plasma est faiblement dispersif et donc on peut développer la relation de dispersion à l'ordre 1 au voisinage de  $\omega_0$  :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \frac{dk}{d\omega}(\omega = \omega_0) \quad (167)$$

$$\text{soit } k(\omega) = k_0 + \frac{1}{v_g}(\omega - \omega_0) \quad (168)$$



---

Figure 4: Propagation non dispersive d'un paquet d'onde.

Ce signal  $f_0(t)$  pénètre en  $x = 0$  dans le milieu. Les différentes composantes de Fourier sont des OPPH qui se propagent à des vitesses  $v_\varphi(\omega)$  différentes car le milieu est dispersif. On en déduit le signal après une propagation sur la distance  $x$  :

$$\underline{A}(x = 0, t) = f_0(t) = \sum_{\omega} d\underline{F}_0(\omega) \exp(j\omega t) \quad (169)$$

$$\underline{A}(x, t) = \sum_{\omega} d\underline{F}_0(\omega) \exp\left(j\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)\right) \quad (170)$$

## 2.2 Ordre 0 : milieu non dispersif

Si le milieu est non dispersif (à l'ordre 0), c'est le cas de l'équation de d'Alembert, la relation de dispersion est linéaire. Le signal est reconstitué en  $x$  tel qu'il était en  $x = 0$  avec un retard dû à la propagation égal à  $\frac{x}{v}$ . Le paquet d'onde se déplace en bloc entier à la même vitesse  $v_g = v_\varphi$ .

## 2.3 Battements :

Considérons la superposition de deux OPPH de même amplitude  $A_M$ , en phase en  $x = 0$  et de pulsations voisines :

$$A_1(x=0, t) = A_M \cos(\omega' t) \quad (171)$$

$$A_2(x=0, t) = A_M \cos(\omega'' t) \quad (172)$$

$$\text{avec } \omega' = \omega_0 - \frac{\delta\omega}{2} \quad (173)$$

$$\text{et } \omega'' = \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2} \quad (174)$$

$$\text{de (168) on déduit } k' = k_0 - \frac{1}{v_g} \frac{\delta\omega}{2} \quad (175)$$

$$\text{et } k'' = k_0 + \frac{1}{v_g} \frac{\delta\omega}{2} \quad (176)$$

$$\text{d'où } k_0 = \frac{k' + k''}{2} \quad (177)$$

$$\text{et } \frac{\delta\omega}{v_g} = k'' - k' \quad (178)$$

$$\text{après propagation sur } x \quad A_1(x, t) = A_M \cos(\omega' t - k' x) \quad (179)$$

$$\text{et } A_2(x, t) = A_M \cos(\omega'' t - k'' x) \quad (180)$$

$$\text{la superposition donne } A(x, t) = A_1(x, t) + A_2(x, t) \quad (181)$$

$$A(x, t) = A_M [\cos(\omega' t - k' x) + \cos(\omega'' t - k'' x)] \quad (182)$$

$$A(x, t) = 2A_M \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}\left(t - \frac{x}{v_g}\right)\right) \cos(\omega_0 t - k_0 x) \quad (183)$$

On reconnaît des **battements spatiaux** : la porteuse (l'onde moyenne) est une OPPH en  $\cos(\omega_0 t - k_0 x)$  qui se propage à  $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$ . L'enveloppe qui constitue les battements est une OPPH de vitesse  $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0}$  différente de la vitesse de phase  $v_\varphi$  de la porteuse :

Il en résulte que **le paquet d'ondes en se propage en se déformant par glissement de phase**. La porteuse glisse à l'intérieur à l'intérieur de l'enveloppe.

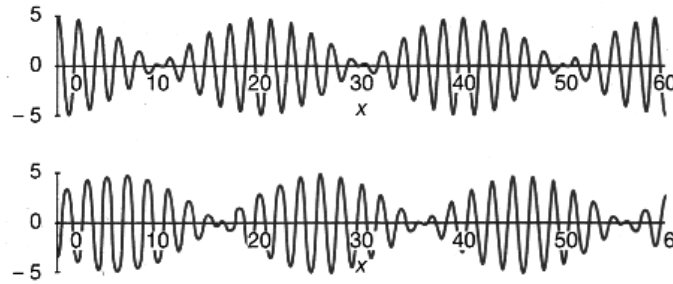


Figure 5: La déformation des battements entre deux instants.

On constate qu'entre les deux instants considérés, l'enveloppe est translatée de  $\Delta x = 6$ , alors que l'onde moyenne est translatée de  $\Delta x = 1$  (on le voit en  $x = 0$ ).

## 2.4 Ordre 1 : glissement de phase

Soit le paquet d'onde décrit par le signal :

$$\underline{A}(x, t) = \sum_{\omega} d\underline{F}_0(\omega) \exp(j\omega t - jkx) \quad (184)$$

Le **spectre de Fourier** de ce paquet d'onde est centré sur la pulsation moyenne  $\omega_0$  et sa largeur est  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

Dans un **milieu peu dispersif**, on peut effectuer un **développement de Taylor** de  $k(\omega)$  au voisinage de  $\omega_0$  :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \frac{dk}{d\omega}(\omega = \omega_0) \quad (185)$$

$$\text{soit } k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \frac{1}{v_g} \quad (186)$$

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) \frac{1}{v_g} \quad (187)$$

$$\text{en posant } \frac{dk}{d\omega}(\omega = \omega_0) = \frac{1}{v_g} \quad (188)$$

$$\text{et } k_0 = k(\omega_0) \quad (189)$$

$$\text{développons } \omega t - kx = (\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x + (\omega_0 t - k_0 x) \quad (190)$$

$$\text{or (187) } \omega t - kx = (\omega - \omega_0)t - (\omega - \omega_0) \frac{x}{v_g} + (\omega_0 t - k_0 x) \quad (191)$$

$$\omega t - kx = (\omega - \omega_0) \left(t - \frac{x}{v_g}\right) + (\omega_0 t - k_0 x) \quad (192)$$

Le paquet d'onde se propageant dans un **milieu peu dispersif** s'écrit :

$$\underline{A}(x, t) = \sum_{\omega} d\underline{F}_0(\omega) \exp \left[ j(\omega - \omega_0) \left(t - \frac{x}{v_g}\right) \right] \exp(j\omega_0 t - jk_0 x) \quad (193)$$

$$\text{soit : } \underline{A}(x, t) = \underline{E}(x, t) \exp(j\omega_0 t - jk_0 x) \quad (194)$$

Dans l'expression du paquet d'ondes :

- l'**enveloppe**  $\underline{E}(x, t) = \sum_{\omega} d\underline{F}_0(\omega) \exp \left[ j(\omega - \omega_0) \left(t - \frac{x}{v_g}\right) \right] = \underline{E} \left(t - \frac{x}{v_g}\right)$  du paquet d'ondes est une **OPP non harmonique se propageant à la vitesse de groupe  $v_g$**  ;
- la **porteuse** est une **OPPH se propageant à la vitesse de phase  $v_{\varphi} = \frac{\omega_0}{k_0}$** .

Comme la relation de dispersion n'est pas linéaire  $v_g \neq v_{\varphi}$ . La porteuse et l'enveloppe ne se propagent pas à la même vitesse. La porteuse "glisse" à l'intérieur de l'enveloppe. On parle de dispersion normale lorsque  $v_{\varphi} > v_g$  : la porteuse se déplace plus vite que l'enveloppe. Les crêtes de la porteuse (repère vert) avancent à une vitesse différente des crêtes de l'onde enveloppe (repère rouge).

♥ **L'information est transportée par l'enveloppe du paquet d'ondes à la vitesse**

Figure 6: Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu faiblement dispersif.

appelée de groupe  $v_g$  définie par :

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)(\omega = \omega_0) \quad (195)$$

$$\text{alors que } v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0} \quad (196)$$

$$\text{si le milieu est dispersif } v_g \neq v_\varphi \quad (197)$$

$$\text{sinon } v_g = v_\varphi \quad (198)$$

$$\text{On a toujours } v_g < c \quad (199)$$

$$\text{alors qu'il est possible d'avoir } v_\varphi > c \quad (200)$$

Ni l'enveloppe du paquet d'ondes ni la porteuse ne se déforment (car le milieu n'est pas absorbant). **La déformation du paquet d'onde est lié au glissement de la porteuse** ce qui crée un **décalage** entre les deux. **La vitesse de groupe est aussi la vitesse de propagation de l'énergie transportée par le paquet d'ondes.**

Le point vert suit la crête de l'onde moyenne et le point rouge suit la crête de l'enveloppe.

---

## 2.5 Propagation d'un paquet d'ondes dans un plasma

La vitesse de groupe dans un plasma en HF se détermine à partir de la relation de dispersion :

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \quad (201)$$

$$\text{en différentiant } 2c^2 k dk = 2\omega d\omega \quad (202)$$

$$\text{soit } \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} \quad (203)$$

$$\text{or } v_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad (204)$$

$$\text{d'où } v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} \quad (205)$$

$$\text{or (93) } v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c \quad (206)$$

## 2.6 Ordre 2 : étalement du paquet d'onde

Nous avons établi qu'à l'ordre 1 le paquet d'onde se déforme par glissement de phase. La vitesse de l'enveloppe était  $v_g$  constante.

A l'ordre 2, la vitesse de groupe  $v_g = v_g(\omega)$  n'est plus constante, l'enveloppe se déforme.

$$\frac{\Delta v_g}{\Delta k} \approx \left( \frac{dv_g}{dk} \right)_{k_0} \quad (207)$$

$$\text{relation de Fourier } \Delta k \approx \frac{1}{\Delta x_0} \quad (208)$$

Finalement, pendant  $t$  le paquet d'onde d'extension spatiale  $\Delta x_0$  s'étalement de :

$$t \Delta v_g = \frac{t}{\Delta x_0} \left( \frac{d^2 \omega}{dk^2} \right)_{k_0}$$

L'étalement du paquet d'onde est donc une déformation du paquet d'onde liée à  $\left( \frac{dv_g}{dk} \right)_{k_0} = \left( \frac{d^2 \omega}{dk^2} \right)_{k_0} \neq 0$ .

---

Figure 7: Etallement d'un paquet d'onde.

---

### 3 Interfaces entre deux milieux :

#### 3.1 Expression des champs électromagnétiques :

L'interface  $x = 0$  sépare deux milieux d'indices complexes  $\underline{n}_1$  et  $\underline{n}_2$  différents. On considère **une onde incidente arrivant sur ce dioptre en incidence normale**. Comme toutes les équations sont linéaires, on considère l'onde de base qu'est l'OPPH polarisée rectilignement tangentiellement à l'interface :

$$\underline{\vec{E}}_i = \underline{E}_{0i} \exp(j\omega t - jk_1 x) \vec{u}_y \quad (209)$$

$$\text{avec : } k_1 = \frac{\underline{n}_1 \omega}{c} \quad (210)$$

Les expériences d'optique nous montrent que l'onde incidente donne en général naissance à une onde réfléchie et une onde transmise. Supposons que ces trois ondes possèdent la **même polarisation** :

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{E}_{0r} \exp(j\omega t + jk_1 x) \vec{u}_y \quad (211)$$

$$\underline{\vec{E}}_{tr} = \underline{E}_{0tr} \exp(j\omega t - jk_2 x) \vec{u}_y \quad (212)$$

$$\text{avec : } k_2 = \frac{\underline{n}_2 \omega}{c} \quad (213)$$

On déduit les champs magnétiques de **la relation de structure appliquée à CHAQUE OPPH** et non pas à l'onde globale (n'est en général pas une OPPH) dans le milieu (1) :

$$\underline{\vec{B}}_i = \frac{\underline{n}_1 \vec{u}_x \wedge \underline{\vec{E}}_i}{c} \quad (214)$$

$$\underline{\vec{B}}_i = \frac{\underline{n}_1 \underline{E}_{0i}}{c} \exp(j\omega t - jk_1 x) \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \quad (215)$$

$$\text{soit : } \underline{\vec{B}}_i = \frac{\underline{n}_1 \underline{E}_{0i}}{c} \exp(j\omega t - jk_1 x) \vec{u}_z \quad (216)$$

$$\underline{\vec{B}}_r = \frac{\underline{n}_1 (-\vec{u}_x) \wedge \underline{\vec{E}}_r}{c} \quad (217)$$

$$\underline{\vec{B}}_r = \frac{\underline{n}_1 \underline{E}_{0i}}{c} \exp(j\omega t + jk_1 x) (-\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y) \quad (218)$$

$$\text{soit : } \underline{\vec{B}}_r = -\frac{\underline{n}_1 \underline{E}_{0r}}{c} \exp(j\omega t + jk_1 x) \vec{u}_z \quad (219)$$

$$\underline{\vec{B}}_{tr} = \frac{\underline{n}_2 \vec{u}_x \wedge \underline{\vec{E}}_{tr}}{c} \quad (220)$$

$$\underline{\vec{B}}_{tr} = \frac{\underline{n}_2 \underline{E}_{0tr}}{c} \exp(j\omega t - jk_2 x) \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \quad (221)$$

$$\text{soit : } \underline{\vec{B}}_{tr} = \frac{\underline{n}_2 \underline{E}_{0tr}}{c} \exp(j\omega t - jk_2 x) \vec{u}_z \quad (222)$$

$$(223)$$

#### 3.2 Coefficients de réflexion et de transmission de $\underline{\vec{E}}$ :

On **admet** la continuité des champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  à l'interface entre deux milieux :

$$\text{A tout instant } t : \underline{E}_1(x=0, t) = \underline{E}_2(x=0, t) \quad (224)$$

$$\text{et : } \underline{B}_1(x=0, t) = \underline{B}_2(x=0, t) \quad (225)$$

On se place dans le cas où il n'y a pas de courant surfacique  $\vec{j}_s = \vec{0}$ . Dans un conducteur réel le courant n'est que volumique.

Le champ électromagnétique total dans le milieu (1) résulte de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$\underline{E}_{0i} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{0tr} \quad (226)$$

$$\underline{n}_1 \underline{E}_{0i} - \underline{n}_1 \underline{E}_{0r} = \underline{n}_2 \underline{E}_{0tr} \quad (227)$$

$$(228)$$

$$\text{Posons : } \underline{r}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} \quad (229)$$

$$\text{et : } \underline{t}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\underline{E}_{0tr}}{\underline{E}_{0i}} \quad (230)$$

En divisant (226) par  $\underline{E}_{0i}$  et (227) par  $\underline{n}_1 \underline{E}_{0i}$  on obtient :

$$1 + \underline{r}_{1 \rightarrow 2} = \underline{t}_{1 \rightarrow 2} \quad (231)$$

$$\text{et : } 1 - \underline{r}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\underline{n}_2}{\underline{n}_1} \underline{t}_{1 \rightarrow 2} \quad (232)$$

$$(231) + (232) \text{ donne : } 2 = \underline{t}_{1 \rightarrow 2} \left(1 + \frac{\underline{n}_2}{\underline{n}_1}\right) \quad (233)$$

$$(231) - (232) \text{ donne : } \underline{r}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\underline{t}}{2} \left(1 - \frac{\underline{n}_2}{\underline{n}_1}\right) \quad (234)$$

Les coefficients de réflexion  $\underline{r}_{1 \rightarrow 2}$  et de transmission  $\underline{t}_{1 \rightarrow 2}$  du champ électrique  $\vec{E}$  sont :

$$\underline{t}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\underline{E}_{0tr}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{2\underline{n}_1}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \quad (235)$$

$$\text{et : } \underline{r}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{\underline{n}_1 - \underline{n}_2}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \quad (236)$$

En général ces coefficients sont complexes de sorte que le déphasage entre les champs sont quelconques.



♡ Quand une OEM arrive en incidence normale sur un dioptré optique séparant deux milieux transparents, les indices sont réels. On en déduit que les champs sont tous en phase sauf :  
si  $n_1 < n_2$  (ex : air  $\rightarrow$  verre) **la réflexion introduit un déphasage** de  $\pi = \arg(-1) = \arg(\underline{r}_{1 \rightarrow 2})$ .

### 3.3 Cas d'une interface vide-plasma pour $\omega > \omega_p$ :

#### 3.3.1 Coefficients de réflexion et de transmission en puissance :

$$\text{Dans le vide : } \underline{n}_1 = 1 \quad (237)$$

$$\text{Dans le plasma (95) avec } \omega > \omega_p : \underline{n}_2 = n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (238)$$

$$(235) \text{ s'écrit : } t_{1 \rightarrow 2} = \frac{2}{1 + n} \quad (239)$$

$$(236) \text{ s'écrit : } r_{1 \rightarrow 2} = \frac{1 - n}{1 + n} \quad (240)$$

A l'interface ( $x = 0$ ) les champs s'écrivent :

$$(216) : \underline{\vec{B}}_i = \frac{\underline{E}_{0i}}{c} \exp(j\omega t) \vec{u}_z \quad (241)$$

$$(219) : \underline{\vec{B}}_r = -\frac{\underline{E}_{0r}}{c} \exp(j\omega t) \vec{u}_z \quad (242)$$

$$(222) : \underline{\vec{B}}_{tr} = \frac{n\underline{E}_{0tr}}{c} \exp(j\omega t) \vec{u}_z \quad (243)$$

Choisissons l'origine des temps de sorte que  $\underline{E}_{0i}$  soit réel. Il en résulte que  $\underline{E}_{0r}$  et  $\underline{E}_{0tr}$  sont aussi réels car  $r_{1 \rightarrow 2}$  et  $t_{1 \rightarrow 2}$  sont alors réels. On en déduit les champs réels à l'interface ( $x = 0$ ) pour ensuite exprimer les vecteurs de Poynting  $\mathcal{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ . En effet, les grandeurs énergétiques étant quadratiques elles ne peuvent pas être définies en complexe

$$\vec{E}_i = E_{0i} \cos(\omega t) \vec{u}_y \quad (244)$$

$$\vec{E}_r = E_{0r} \cos(\omega t) \vec{u}_y \quad (245)$$

$$\vec{E}_{tr} = E_{0tr} \cos(\omega t) \vec{u}_y \quad (246)$$

$$\vec{B}_i = \frac{E_{0i}}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_z \quad (247)$$

$$\vec{B}_r = -\frac{E_{0r}}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_z \quad (248)$$

$$\vec{B}_{tr} = \frac{nE_{0tr}}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_z \quad (249)$$

$$\langle \vec{\mathcal{R}}_i \cdot \vec{u}_x \rangle = \langle \frac{d\mathcal{P}_i}{dS} \rangle = \frac{E_{0i}^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle}{c\mu_0} = \frac{E_{0i}^2}{2c\mu_0} \quad (250)$$

$$\langle \vec{\mathcal{R}}_r \cdot (-\vec{u}_x) \rangle = \langle \frac{d\mathcal{P}_r}{dS} \rangle = \frac{E_{0r}^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle}{c\mu_0} = \frac{E_{0r}^2}{2c\mu_0} \quad (251)$$

$$\langle \vec{\mathcal{R}}_{tr} \cdot \vec{u}_x \rangle = \langle \frac{d\mathcal{P}_{tr}}{dS} \rangle = \frac{nE_{0tr}^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle}{c\mu_0} = \frac{nE_{0tr}^2}{2c\mu_0} \quad (252)$$

Divisons (251) puis (252) par (250).

Les coefficients de réflexion  $R_{1 \rightarrow 2}$  respectivement  $T_{1 \rightarrow 2}$  en puissance dans le cas d'une interface entre le vide et un milieu d'indice réel  $n$  :

$$R_{1 \rightarrow 2} = \frac{\langle \frac{dP_r}{dS} \rangle}{\langle \frac{dP_i}{dS} \rangle} = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} = r_{1 \rightarrow 2}^2 = \left( \frac{1-n}{1+n} \right)^2 \quad (253)$$

$$T_{1 \rightarrow 2} = \frac{\langle \frac{dP_{tr}}{dS} \rangle}{\langle \frac{dP_i}{dS} \rangle} = \frac{nE_{0tr}^2}{E_{0i}^2} = nt_{1 \rightarrow 2}^2 = \frac{4n}{(1+n)^2} \quad (254)$$

La conservation de la puissance moyenne se traduit par :

$$R_{1 \rightarrow 2} + T_{1 \rightarrow 2} = 1 \quad (255)$$

En tenant compte de (95) on obtient les graphes de  $R_{1 \rightarrow 2}(\omega)$  et  $T_{1 \rightarrow 2}(\omega)$ ; On constate que :

- en très HF,  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow 1$  : l'onde incidente est intégralement transmise car **il n'y a plus d'interface**.
- si  $\omega \rightarrow \omega_p$  alors  $n \rightarrow 0$  d'où  $R_{1 \rightarrow 2} \rightarrow 1$  et  $T_{1 \rightarrow 2} \rightarrow 0$  : il y a **réflexion totale**.

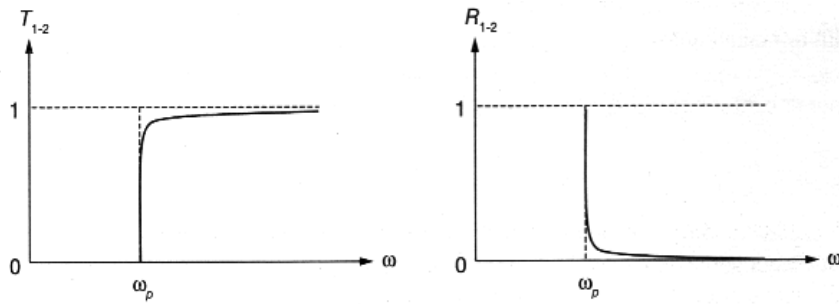


Figure 8: Dans le domaine de transparence du plasma : pas d'interface et réflexion totale à  $\omega_p$ .

### 3.4 Cas d'une interface vide-plasma pour $\omega < \omega_p$

D'après (87) dans le domaine réactif du plasma ( $\omega < \omega_p$ ) alors  $k$  et  $\underline{n}$  sont imaginaires purs :

$$k = jk'' = \pm j \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} \quad (256)$$

$$\text{or si } k'' > 0 \text{ alors : } \exp(k''x) \rightarrow \infty \quad (257)$$

$$\text{donc on ne retient que : } k = -j \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} \quad (258)$$

$$\text{or : } \underline{n} = jn'' = \frac{jk''c}{\omega} \quad (259)$$

$$\text{d'où : } n'' = -\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \quad (260)$$

$$\text{dans le vide : } \underline{n}_1 = 1 \quad (261)$$

$$\text{dans le plasma : } \underline{n}_2 = \underline{n} = jn'' \quad (262)$$

$$\text{d'où d'après (236) : } \underline{r}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1 - jn''}{1 + jn''} \quad (263)$$

$$\text{et d'après (235) : } \underline{t}_{1 \rightarrow 2} = \frac{2}{1 + jn''} \quad (264)$$

Dans ce cas, le plasma est le siège d'une onde évanescence qui ne transporte aucune énergie électromagnétique. Donc :

$$\underline{T}_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (265)$$

$$\text{d'après (255) on déduit : } \underline{R}_{1 \rightarrow 2} = 1 \quad (266)$$

$$\text{soit avec (253) : } |\underline{r}_{1 \rightarrow 2}| = \left| \frac{1 - jn''}{1 + jn''} \right|^2 = 1 \quad (267)$$

$$\text{d'où : } \underline{r}_{1 \rightarrow 2} = \exp(-j\varphi) \quad (268)$$

$$\text{car : } \frac{\varphi}{2} = \arg(1 + jn'') = -\arg(1 - jn'') \quad (269)$$

$$\text{soit : } \varphi = 2 \arctan(n'') \quad (270)$$

On constate donc que **la réflexion est totale et introduit un déphasage** de  $\varphi$ . Ainsi à l'interface  $x = 0$  les champs s'écrivent :

$$\vec{E}_i = E_{0i} \cos(\omega t) \vec{u}_y \quad (271)$$

$$\text{et : } \vec{E}_r = E_{0r} \cos(\omega t - \varphi) \vec{u}_y \quad (272)$$

### 3.5 Cas d'une interface vide-conducteur ohmique

Pour un conducteur ohmique sa conductivité  $\sigma$  est réelle tant que  $f < 10^{14} \text{ Hz}$  et la relation de dispersion (64) s'approxime à :

$$\underline{k}^2 = -\mu_0 \sigma j \omega \quad (273)$$

$$\text{soit avec (129) : } \underline{k}^2 = -\frac{2j}{\delta^2} \quad (274)$$

$$\text{d'où : } \underline{k} = \frac{1 - j}{\delta} \quad (275)$$

En effet on considère une onde progressive selon  $+\vec{u}_x$ .

L'approximation est valable si :

$$\frac{\omega^2}{c^2} \ll \mu_0 \sigma \omega \quad (276)$$

$$\text{d'où : } \frac{\omega^2}{c^2} \ll \frac{2}{\delta^2} \quad (277)$$

$$\frac{\omega}{c} \ll \frac{\sqrt{2}}{\delta} \quad (278)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \ll \frac{\sqrt{2}}{\delta} \quad (279)$$

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} \ll \sqrt{2} \quad (280)$$

$$\text{posons : } \varepsilon = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \quad (281)$$

$$\varepsilon \ll 1 \quad (282)$$

$$\text{soit : } \lambda \gg \delta \quad (283)$$

$$\text{or (74) : } \underline{n} = \frac{kc}{\omega} \quad (284)$$

$$\text{soit : } \underline{n} = \frac{(1-j)\lambda}{2\pi\delta} \quad (285)$$

$$\underline{n} = \frac{(1-j)}{\varepsilon} \quad (286)$$

$$(236) \text{ s'écrit : } \underline{r}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} = \frac{1 - (\frac{1-j}{\varepsilon})}{1 + (\frac{1-j}{\varepsilon})} = -\frac{1 - j - \varepsilon}{1 - j + \varepsilon} \quad (287)$$

$$(235) \text{ s'écrit : } \underline{t}_{1 \rightarrow 2} = \frac{2}{1 + \underline{n}} = \frac{2}{1 + (\frac{1-j}{\varepsilon})} = \frac{2\varepsilon}{1 - j + \varepsilon} \quad (288)$$

Le **modèle du conducteur parfait** est obtenu avec la limite  $\delta \rightarrow 0$  et  $\omega \neq 0$ . Il n'y a **pas d'onde transmise** dans le métal en régime variable. **L'onde réfléchie est de même amplitude que l'onde incidente et déphasée de  $\pi$ .**

$$\text{soit : } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (289)$$

$$\text{d'où : } \underline{r}_{1 \rightarrow 2} = -1 \quad (290)$$

$$\text{et : } \underline{t}_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (291)$$

### 3.6 Cas d'une interface vide-métal en optique

En optique  $f \approx 10^{15} \text{ Hz} > 10^{14} \text{ Hz} = f_M$  et donc on ne peut plus approximer la conductivité  $\underline{\sigma}$  du métal à un réel. On doit reprendre la relation de dispersion (64) en tenant compte de (113) :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 j \omega \frac{\sigma_0}{1 + j \omega \tau} \quad (292)$$

$$\text{or : } \omega \tau \approx 63 \gg 1 \quad (293)$$

$$\text{d'où : } \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 \sigma_0}{\tau} \quad (294)$$

$$\text{soit : } \underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (295)$$

$$\text{avec : } \omega_p = \sqrt{\mu_0 c^2 \frac{\sigma_0}{\tau}} = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \tau}} \quad (296)$$

$$\text{pour le cuivre : } \omega_p = \sqrt{\frac{36\pi 10^9 10^8}{10^{-14}}} = 3.10^{16} \text{rad.s}^{-1} \quad (297)$$

$$\text{or en optique : } \lambda > 400 \text{nm} \quad (298)$$

$$\text{soit : } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} < \frac{2\pi 3.10^8}{4.10^{-7}} \quad (299)$$

$$\omega < 2.10^{15} \text{rad.s}^{-1} \quad (300)$$

$$\text{on constate que : } \omega < \omega_p \quad (301)$$

Tout se passe comme si le métal se comportait comme un plasma dans son domaine réactif. On en déduit que l'onde transmise est une onde évanescence. Or, l'onde évanescence ne transporte aucune énergie. Il y a **réflexion totale** puisque toute la puissance incidente est cédée à l'onde réfléchie (266).

En optique, la réflexion sur un miroir parfait provoque un déphasage de  $\pi$ .

$$\underline{r}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1 - j n''}{1 + j n''} = \exp(-j \varphi) \quad (302)$$

$$\text{pour le cuivre : } |\varphi| = 2 |\arctan n''| = 160^\circ \quad (303)$$

$$\text{car : } -n'' = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \quad (304)$$

D'autre part, le métal se comporte comme un plasma dans son domaine de transparence si  $\omega > \omega_p$  :

$$\lambda < \frac{2\pi c}{\omega_p} \quad (305)$$

$$\text{pour le cuivre : } \lambda < 0,1 \mu\text{m} \quad (306)$$

**Les métaux sont donc transparents aux UV.** Une mince feuille de métal (l'or par exemple) laisse passer les UV comme une simple vitre.

### 3.7 Polarisation par réflexion vitreuse :

Soit une OEM incidente non polarisée qui arrive avec un angle  $i_1$  sur un dioptré séparant deux milieux d'indices réels  $n_1$  et  $n_2$ . Décomposons le champ électrique incident  $\vec{E}_i$  en une composante parallèle au plan d'incidence  $\vec{E}_{i\text{par}}$  et l'autre perpendiculaire au plan d'incidence  $\vec{E}_{i\text{per}}$  : Le plan d'incidence est défini comme le plan contenant la direction incidente  $\vec{k}_i$  et la normale au dioptré au point d'incidence.

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i\text{par}} + \vec{E}_{i\text{per}} \quad (307)$$

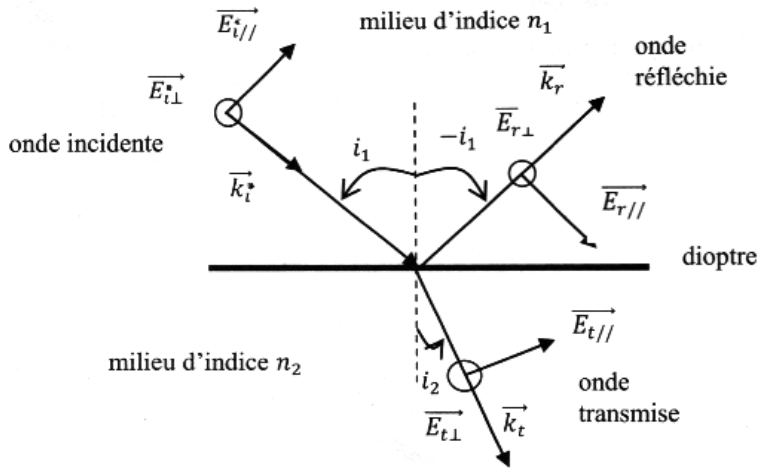


Figure 9: Réflexion vitreuse.

On constate expérimentalement que le coefficient de réflexion  $R_{12}$  en puissance dépend de la polarisation de l'onde. En incidence normale ( $i_1 = 0$ ) on a :

$$R_{12par}(i_1 = 0) = R_{12perp}(i_1 = 0) = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad (308)$$

A l'incidence de Brewster la lumière réfléchie est polarisée rectilignement (perpendiculaire au plan d'incidence) alors que la lumière incidente n'est pas polarisée.

Les lunettes de soleil à verres polarisants éliminent les rayons réfléchis à l'incidence de Brewster. Ainsi, elles permettent d'éliminer les reflets provoqués par les grandes surfaces telles que la mer et la neige.

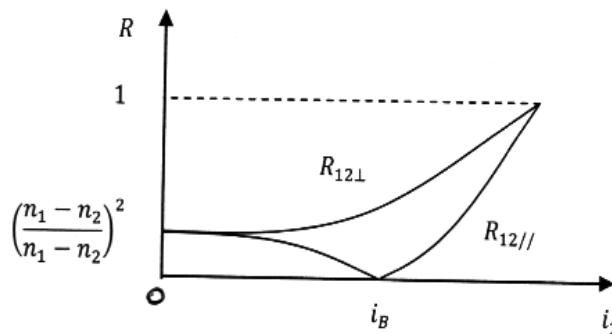


Figure 10: Angle de Brewster  $i_B$ .

L'incidence de Brewster  $i_B$  est telle le rayon transmis est perpendiculaire au rayon réfléchi :

$$\text{d'après la 2nde loi de Descartes : } n_1 \sin i_B = n_2 \sin i_2 \quad (309)$$

$$\text{or : } \pi = i_B + i_2 + \frac{\pi}{2} \quad (310)$$

$$\text{soit : } n_1 \sin i_B = n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_B\right) \quad (311)$$

$$n_1 \sin i_B = n_2 \cos(i_B) \quad (312)$$

$$\text{d'où : } \tan i_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (313)$$

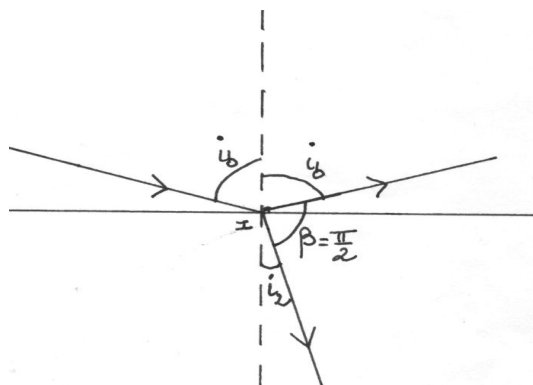


Figure 11: A l'angle de Brewster  $i_B$  les rayons réfracté et réfléchi sont perpendiculaires.



Figure 12: Les verres polarisants éliminent les reflets.

---

## 4 Réflexion d'une OemPPH sur un plan conducteur parfait en incidence normale

### 4.1 OEM dans un métal réel

On rappelle que dans un conducteur réel d'épaisseur de Peau  $\delta$  l'OEM qui peut se propager est de la forme :

$$\begin{aligned}k &= \frac{1}{\delta}(1 - j) \\ \vec{E}_{tr} &= E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \vec{u}_y \\ \vec{E}_{tr} &= E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \vec{u}_y \\ \vec{B}_{tr} &= \frac{k \vec{u}_x}{\omega} \wedge \vec{E}_{tr} \\ \vec{B}_{tr} &= \frac{E_0}{\delta \omega} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \left[ \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right] \vec{u}_z \\ < \mathcal{R}_{tr} \cdot \vec{u}_x >_t &= \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta \omega} \exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right)\end{aligned}$$

Le courant est réparti dans un volume d'épaisseur  $\delta$ . Il n'y a pas de courant surfacique.

### 4.2 OEM incidente

On considère une OemPPH incidente se propageant dans le **vide** selon  $(Ox)$ . Elle arrive en incidence normale en  $x = 0$  sur l'interface vide/métal parfait. L'onde incidente est de la forme :

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= E_0 \exp(j\omega t - jkx) \vec{u}_y \\ \vec{B}_i &= \frac{k \vec{u}_x}{\omega} \wedge \vec{E}_i = \frac{\vec{u}_x}{c} \wedge \vec{E}_i \\ \vec{B}_i &= \frac{E_0}{c} \exp(j\omega t - jkx) \vec{u}_z\end{aligned}$$

### 4.3 Conducteur parfait

D'après l'étude du conducteur réel on constate que dans le cas du conducteur parfait les champs transmis sont nuls. L'onde incidente est totalement réfléchie ( $\underline{r} = -1$ ,  $R = 1$ ,  $T = 0$ ). Toute l'énergie électromagnétique incidente se retrouve donc sous forme d'onde réfléchie.

Un conducteur parfait a une conductivité  $\sigma$  infinie et donc une épaisseur de peau  $\delta$  nulle. Le seul courant électrique possible ne peut être que confiné sur une épaisseur  $\delta$  nulle c'est-à-dire sur la surface du conducteur. Il s'agit d'une densité surfacique de courant  $\vec{j}_s$  (en  $A.m^{-1}$ ).

Quand l'OEM incidente arrive sur le métal parfait  $\vec{E}_i$  met en mouvement les charges du métal et provoque donc un courant  $\vec{j}_s$ . Ces charges accélérées rayonnent un champ électromagnétique qui dans le métal est en opposition de phase avec l'onde incidente. Leur superposition conduit à l'absence d'onde transmise. On cherche donc une OEM réfléchie de la forme :

$$\vec{E}_r = \underline{E}_{0ry} \exp(j\omega t + jkx) \vec{u}_y + \underline{E}_{0rz} \exp(j\omega t + jkx) \vec{u}_z$$



---

## 4.4 Relation de passage pour le champ électrique

D'après la relation de passage pour le champ électrique à l'interface vide/métal parfait :

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 - \vec{E}_1 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{E}_{tr}(x=0^+) - [\vec{E}_i(x=0^-) + \vec{E}_r(x=0^-)] &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x \\ \text{projection selon } (Ox) \quad \sigma &= 0 \\ \text{projection selon } (Oz) \quad \underline{E}_{orz} &= 0 \\ \text{projection selon } (Oy) \quad \underline{E}_{ory} &= -E_0\end{aligned}$$

La réflexion normale sur un métal parfait introduit un déphasage de  $\pi$ .

$$\begin{aligned}\underline{E}_r &= -E_0 \exp(j\omega t + jkx) \vec{u}_y \\ \underline{B}_r &= -\frac{\vec{u}_x}{c} \wedge \underline{E}_r \\ \underline{B}_r &= \frac{E_0}{c} \exp(j\omega t + jkx) \vec{u}_z\end{aligned}$$

## 4.5 Onde stationnaire dans le vide

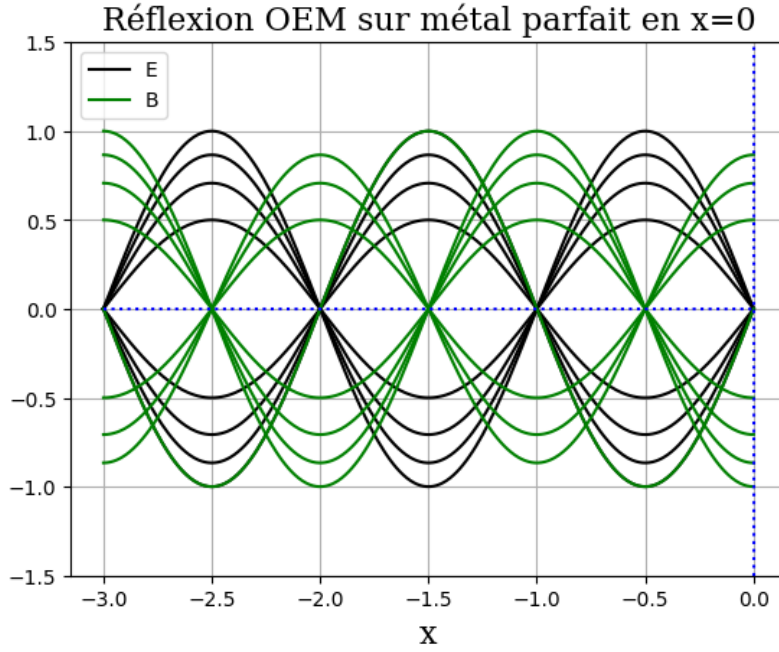
On en déduit l'onde totale dans le vide issue de la superposition des OEM incidente et réfléchi :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{tot} &= \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)] \vec{u}_y \\ \vec{B}_{tot} &= \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} [\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)] \vec{u}_z\end{aligned}$$

Le découplage entre les variables  $x$  et  $t$  définit une **onde stationnaire** pour l'onde totale dans le vide :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{tot} &= \vec{E}_i + \vec{E}_r = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y \\ \vec{B}_{tot} &= \vec{B}_i + \vec{B}_r = 2\frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{u}_z \\ \langle \vec{R}_{tot} \cdot \vec{u}_x \rangle_t &= \langle \frac{\vec{E}_{tot} \wedge \vec{B}_{tot}}{\mu_0} \rangle_t = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c} \langle \sin(2\omega t) \rangle \sin(2kx) = 0\end{aligned}$$

L'interface  $x = 0$  constitue un **ventre** de  $B$  et un **nœud** de  $E$ . Deux nœuds consécutifs d'un champ sont distants de  $\frac{\lambda}{2}$ . Une onde stationnaire ne se propage pas et donc ne transporte pas de puissance électromagnétique en moyenne. La puissance électromagnétique reste confinée entre deux nœuds consécutifs.



## 4.6 Courants surfaciques

D'après la relation de passage pour le champ magnétique à l'interface vide/métal parfait :

$$\begin{aligned}\vec{B}_2 - \vec{B}_1 &= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_{tr}(x=0^+) - [\vec{B}_i(x=0^-) + \vec{B}_r(x=0^-)] &= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x \\ 0 - \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) &= -\mu_0 j_{sy}\end{aligned}$$

La densité surfacique de courant générée par l'OEM incidente sur le métal parfait est :

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

## 4.7 Pression de radiation

La pression de radiation  $P_{rad}$  que l'OEM génère sur l'interface résulte des **forces de Laplace**. En effet un élément de courant  $j_{sy} dz dy = j_{sy} dS$  plongé dans le champ (extérieur) de l'OEM incidente en  $x = 0^-$  est :

$$\begin{aligned}\delta \vec{F}_{Lap} &= \vec{j}_s dz dy \wedge \vec{B}_i(x=0^-) \\ \frac{\delta \vec{F}_{Lap}}{dS} &= \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_y \wedge \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_z \\ \langle \cos^2(\omega t) \rangle_t &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

La moyenne temporelle de la force surfacique de Laplace donne la **pression de radiation** :

$$P_{rad} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0 E_0^2 = u_{em}$$

---

## 4.8 Théorie corpusculaire

On peut retrouver la pression de radiation en considérant l'aspect corpusculaire. L'énergie de l'OEM incidente est transportée par des photons d'énergie  $E = h\nu = \hbar\omega$  conservée à la réflexion.

La variation de quantité de mouvement d'un photon lors de la réflexion en incidence normale est :

$$\vec{p}_{1 \text{ photon, après}} - \vec{p}_{1 \text{ photon, avant}} = \frac{h\nu}{c}(-\vec{u}_x) - \frac{h\nu}{c}\vec{u}_x = -2\frac{h\nu}{c}\vec{u}_x$$

Pendant  $dt$  il y a  $\delta N$  photons qui arrivent sur la surface  $dS = dydz$ . Ils subissent une variation de quantité de mouvement :

$$d\vec{p}_{\text{photons}} = -\delta N 2\frac{h\nu}{c}\vec{u}_x$$

D'après la 2<sup>de</sup> loi de Newton appliquée aux  $\delta N$  photons :

$$\begin{aligned}\frac{dp_{\text{photons}}}{dt} &= \vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{photons}} \\ \vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{photons}} &= -\frac{\delta N}{dt} 2\frac{h\nu}{c}\vec{u}_x\end{aligned}$$

D'après la **loi des actions réciproques** (3<sup>ième</sup> loi de Newton) la force qu'exerce les photons sur la paroi est :

$$\vec{F}_{\text{photons} \rightarrow \text{paroi}} = \frac{\delta N}{dt} 2\frac{h\nu}{c}\vec{u}_x$$

Or, les  $\delta N$  photons qui arrivent sur la surface  $dS$  pendant  $dt$  à la vitesse  $c$  sont contenus dans le volume  $c dt dS$ . Soit  $u_{em}$  la densité volumique d'énergie électromagnétique (incidente et réfléchi) :

$$\begin{aligned}\delta N 2h\nu &= u_{em} c dt dS \\ \frac{\delta N}{dt} 2\frac{h\nu}{c} &= u_{em} dS\end{aligned}$$

La pression de radiation est la force surfacique :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{photons} \rightarrow \text{paroi}} &= u_{em} dS = P_{rad} dS \vec{u}_x \\ P_{rad} &= u_{em}\end{aligned}$$