OEM

March 30, 2025

1 Réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal

Un conducteur ohmique de conductivité γ occupe le demi-espace $x > 0$, le demi-espace $x < 0$ étant vide. Une onde incidente de la forme :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 \exp\left(j\omega t - j\omega \frac{x}{c}\right) \vec{u}_z \tag{1}$$

Cette onde incidente se propage dans le vide. Elle donne naissance à une onde transmise et à une onde réfléchie de la forme :

$$\text{L'onde transmise est : } \underline{\vec{E}}_{tr} = \underline{t} E_0 \exp(j\omega t - jkx) \vec{u}_z \tag{2}$$

$$\text{avec : } k = \frac{(1-j)}{\delta} \tag{3}$$

$$\text{et : } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \tag{4}$$

$$\text{L'onde réfléchie est : } \underline{\vec{E}}_r = \underline{r} E_0 \exp(j\omega t + jkx) \vec{u}_z \tag{5}$$

1. Déterminer les champs magnétiques correspondants.

2. On suppose que dans cette configuration le champ électrique et le champ magnétique sont continus à l'interface vide-métal. En déduire l'expression de $\underline{t}$ en fonction de $\alpha = \frac{\omega\delta}{c}$. Vérifier que pour $\alpha << 1$ (ce qu'on suppose dans la suite) on a $\underline{t} = \alpha(1 + j)$ en limitant les calculs à l'ordre un en α.

3. En réalité le conducteur a une surface S dans le plan $x = 0$.

   (a) Calculer la moyenne temporelle du flux du vecteur de Poynting en $x = 0_+$. Que représente cette grandeur ?

   (b) Montrer que la moyenne temporelle de la puissance dissipée par effet Joule dans un élément de volume Sdx du conducteur vaut :

   $$< d\mathcal{P}_J >= \gamma \alpha^2 E_0^2 \exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right) Sdx \tag{6}$$

   En déduire la moyenne temporelle de la puissance dissipée par effet Joule dans tout le conducteur. Comparer avec le résultat de la question précédente et commenter.

2 Ondes électromagnétiques dans un cristal ionique

On modélise un cristal de chlorure de sodium par un réseau cubique d'ions alternativement Na^+ et Cl^-, de masses respectives m_+ et m_-. On pose $m = \frac{m_+ m_-}{m_+ + m_-}$, $\omega_T = \sqrt{\frac{K}{m}}$ et $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$ où n est le nombre volumique d'ions de chaque type. Une onde électromagnétique associée à un champ électrique $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(j\omega t - jkz)\vec{u}_x$ se propage dans le cristal et provoque des déplacements $\delta_+(z,t)$ des ions Na^+ et $\delta_-(z,t)$ des ions Cl^- selon $\vec{u}_x$. Ces déplacements sont collectifs à l'échelle mésoscopique et d'extension très faible devant la longueur d'onde. On pose $\delta = \delta_+ - \delta_-$ et on décrit l'action totale de ses voisins sur un ion Na^+ (respectivement Cl^-) par une force de rappel $-K\delta\vec{u}_x$ (respectivement $+K\delta\vec{u}_x$). On note n le nombre volumique d'ions Na^+, identique au nombre volumique d'ions Cl^-.

1. Montrer que $\delta(z,t)$ est solution de :

$$\ddot{\delta} + \omega_T^2 \delta = \frac{eE}{m} \tag{7}$$

2. Exprimer $\underline{\delta}$ en fonction de e, m, ω_T et $\underline{E}$ et montrer que le matériau possède une conductivité complexe :

$$\underline{\sigma} = \frac{j\omega\omega_P^2\varepsilon_0}{\omega_T^2 - \omega^2} \tag{8}$$

3. En déduire que la relation de dispersion des ondes se met sous la forme :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2}\right) \tag{9}$$

   où on exprimera ω_L en fonction de ω_P et ω_T. En déduire sans calculs l'existence d'une bande interdite.

3 Polarisation des ondes électromagnétiques

On place un polariseur (P_1) derrière une source de lumière non polarisée et on récupère une intensité I_0. On place derrière (P_1) un polariseur (P_2) qu'on oriente de telle sorte que l'éclairement récupéré derrière (P_2) soit nul. On dispose d'un troisième polariseur (P_3). Comment rétablir le plus possible de lumière snas toucher ni à (P_1) ni à (P_2) ? Combien vaut alors l'éclairement récupéré ?

4 Vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique

Le demi-espace $z < 0$ étant conducteur parfait, on envisage une onde électromagnétique dans le demi-espace $z > 0$ vide de la forme :

$$\vec{E} = E_0 \sin(\alpha z)\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y \tag{10}$$

$$\vec{B} = \frac{\alpha E_0}{\omega}\cos(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\vec{u}_x + \frac{kE_0}{\omega}\sin(\alpha z)\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z \tag{11}$$

1. On suppose $\omega > c\alpha$. Exprimer la relation de dispersion liant k et ω, puis la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$. Commenter.

2. Exprimer la moyenne spatiotemporelle du vecteur de Poynting et la moyenne spatiotemporelle de la densité volumique d'énergie électromagnétique.

3. En déduire la vitesse moyenne de propagation de l'énergie v_e et commenter.

5 Ondes électromagnétiques longitudinales dans les plasmas

Un plasma d'hydrogène est un gaz totalement ionisé constitué de protons de charge e et de masse m_p et d'électrons de charge $-e$ et de masse m_e. Au repos, les nombres volumiques d'électrons et de protons ont même valeur n_0, de telle sorte que le plasma est localement neutre. On étudie la propagation dans ce plasma d'une onde électromagnétique plane se propageant dans la direction $\vec{u}_x$ et décrite par les champs $\vec{B}_1(x,t)$ et :

$$\vec{E}_1 = E_1(x,t)\vec{u}_x = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{u}_x \tag{12}$$

Cette onde met en mouvement les charges et on note $\vec{v}_e(M,t) = v_{1e}(x,t)\vec{u}_x$ la vitesse d'un électron qui passe au point M à l'instant t (analogue du champ eulérien des vitesses en mécanique des fluides) et $\vec{v}_p(M,t) = v_{1p}(x,t)\vec{u}_x$ la vitesse d'un proton qui passe au point M à l'instant t.

Du fait de ces mouvements, la répartition des charges ne reste pas uniforme et on note $n_e = n_0 + n_{1e}(x,t)$ et $n_p = n_0 + n_{1p}(x,t)$ les nombres volumiques d'électrons et de protons. Tous les champs portant l'indice 1 ont une valeur moyenne temporelle nulle et sont supposés infiniment petits de même ordre, et on limite tous les calculs à l'ordre 1. On néglige toute autre force que les forces électromagnétiques.

1. Une telle onde est qualifiée de plane et longitudinale électrique ; justifier ces qualificatifs. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}_1$ et montrer que le champ magnétique est nul.

2. Exprimer la densité volumique de courants $\vec{j}$ en fonction de e, n_{1p}, n_{1e}, $\vec{v}_{1p}$ et $\vec{v}_{1e}$. En déduire que :

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = -\frac{n_0 e}{\varepsilon_0}(v_{1p} - v_{1e}) \tag{13}$$

3. Ecrire l'équation du mouvement d'un électron passant au point d'abscisse x en utilisant la notion de dérivée particulaire. En déduire que :

$$\frac{\partial v_{1e}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}E_1(x,t) \tag{14}$$

   Ecrire l'équation analogue pour les protons et conclure sur l'influence relative des électrons et des protons sur la densité de courants.

4. Déduire des questions précédentes la relation de dispersion des ondes, c'est-à-dire l'expression de k en fonction de ω.

5. Calculer les valeurs moyennes des grandeurs énergétiques associées au champ électromagnétique de l'onde et commenter.