

Diffusion thermique.

PSI.

November 4, 2025

1 Le modes de transport de l'énergie thermique

1.1 Le rayonnement

Un corps chaud, le Soleil par exemple, émet des **Ondes ÉlectroMagnétiques OEM** qui transportent l'énergie qui peut échauffer le corps qui la reçoit.

Contrairement aux transferts par conduction ou convection qui nécessitent un milieu matériel, le **transfert thermique par rayonnement** peut se faire dans le vide.



1.2 La convection

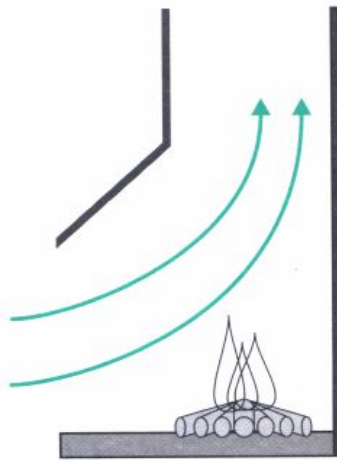
♡ La convection est le transfert d'énergie thermique par déplacement macroscopique de matière à une vitesse $\vec{v} \neq \vec{0}$.

La convection se produit naturellement dans un fluide (liquide ou gaz) où il y a une inhomogénéité ($\overrightarrow{\text{grad}T} \neq \vec{0}$) de température.

La **convection** peut être :

- **naturelle** :

- l'air chaud moins dense s'élève et l'air froid plus dense "tombe" sous l'effet de la gravité ;



– on remue son café avec une cuillère pour accélérer par convection l'homogénéisation de la T .

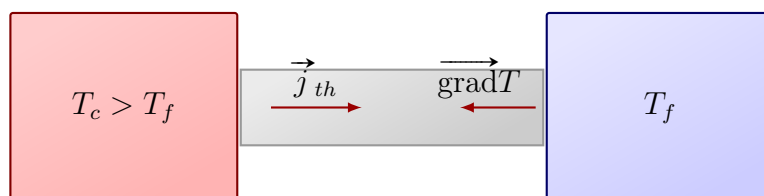
- **forcée** : un fluide caloporteur s'écoule dans le circuit d'une machine thermique :

- eau dans les conduites d'un chauffage central ;
- fluide frigorigène dans une machine frigorifique.

1.3 La conduction

Par exemple, une tige de métal chaude à une extrémité et plus froide à l'autre extrémité est le siège d'un phénomène de **diffusion (conduction) thermique**.

- Il n'y a pas de transport de la matière.
- L'énergie cinétique d'agitation thermique se transmet **de proche en proche** grâce aux chocs.



♡ L'opérateur vectoriel gradient ne s'applique qu'à un champ scalaire. Il est défini en cartésiennes par l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\text{grad}} = \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$$

2 Hypothèses

Dans ce chapitre on se place dans un **solide** de sorte que la convection y est impossible.

On considère un solide **opaque** c'est-à-dire qu'il **ne transmet pas de rayonnement thermique** sous forme d'ondes électromagnétiques. La diffusion thermique est donc le seul mode de transfert de l'énergie thermique.

♡ La conduction (ou diffusion) thermique dans les solides est assurée par la **transmission de proche en proche des énergies de vibration des atomes**.

La conduction thermique est provoquée par une **inhomogénéité de la température** T dans le solide : il y a un $\vec{\text{grad}}T \neq \vec{0}$ dans le solide dirigé dans le sens où la fonction T est croissante *i.e* du froid vers le chaud. *Exemple* : manche de casserole métallique chaud à une extrémité et plus froid à l'autre extrémité en contact avec l'air.

3 Approximation des milieux continus

3.1 Equilibre thermodynamique local

Le solide est hors d'équilibre macroscopiquement puisque sa température n'y est pas homogène. On cherche donc le plus petit sous-système du solide qui puisse constituer un système thermodynamique. On définit un **équilibre thermodynamique local** avec un élément de **volume mésoscopique** $d\tau$ de solide situé en x . Ce sous-système est assez petit macroscopiquement pour que la température $T(x, t)$ y soit uniforme mais assez grand microscopiquement pour contenir un grand nombre d'atomes δN . Ainsi la température $T(x, t)$ qui résulte d'une moyenne statistique des énergies cinétiques d'agitation de ces atomes y est bien définie. Le volume mésoscopique constitue bien un **système thermodynamique**. Les fluctuations relatives autour de la moyenne sont d'autant plus faibles que δN est grand (en $\frac{1}{\sqrt{\delta N}}$).

3.2 Champs eulériens

L'**approximation des milieux continus** consiste à définir les grandeurs thermodynamiques locales telles que la température par le **champ eulérien** $T(x, t)$ où x et t sont des **variables indépendantes** (ou décorrélées). De même on définit l'**énergie interne massique** $u(x, t) = \frac{\delta U}{\delta m}$ comme **grandeur intensive locale** associée à la grandeur extensive U .

♡ La **description d'Euler** consiste à étudier les variations temporelles de la température en se plaçant en un point $M(x, y, z)$ **fixe** qui repère la **surface de contrôle**.

4 Le vecteur densité de courant thermique

D'une façon générale, un **vecteur densité de courant**, noté $\vec{j}$, représente un **flux surfacique** (m^{-2}) **par unité de temps** (s^{-1}) d'une grandeur **extensive** G telle que : l'énergie thermique, le nombre de particules, la masse de fluide, la charge électrique, la quantité de mouvement... $j = \frac{\delta G}{\delta S \delta t}$

Dans ce chapitre, il s'agit de la grandeur énergie thermique. Une énergie thermique (en J) par unité de temps est une puissance (en $W = J.s^{-1}$).

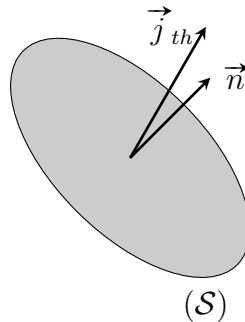
Attention ! Ne pas dire “diffusion de température” mais diffusion (d'énergie) thermique. La température est une grandeur intensive alors que l'énergie est extensive.

♡ Par définition, le **flux** ϕ (W) **du vecteur densité de courant thermique** $\vec{j}_{th}$ (en $W.m^{-2}$) **à travers une surface** ($\mathcal{S}$) **représente la puissance thermique qui traverse** $\mathcal{S}$ (en m^2) :

$$\phi = \iint_{(\mathcal{S})} \vec{j}_{th} \cdot dS \vec{n}$$

Si le vecteur unitaire normale $\vec{n}$ à la surface ($\mathcal{S}$) est dirigé dans le sens **entrant** dans le système, alors le flux est dit **entrant** sinon il est **sortant**.

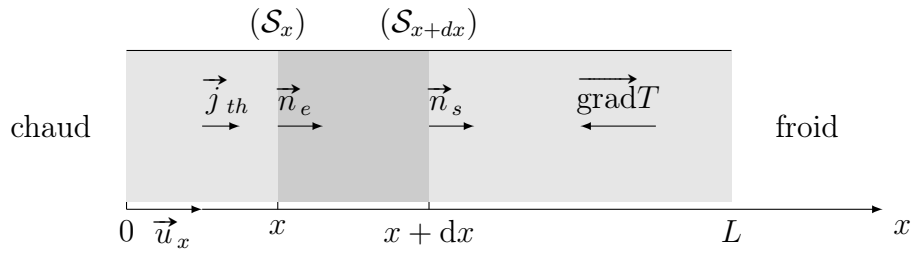
Le vecteur $\vec{j}_{th}$ est toujours dirigé des régions plus chaudes vers les régions plus froides et donc opposé à $\text{grad}T$.



5 Equation locale de conservation de l'énergie

5.1 Hypothèses et choix du système

Soit un solide de masse volumique μ et de sa capacité thermique massique c de forme cylindrique d'axe (Ox), de section droite S constante, de longueur L , calorigugé latéralement et en contact à ses deux extrémités avec deux thermostats responsables de l'inhomogénéité de température. On suppose que le **contact thermique** du solide avec chaque thermostat est **parfait**. Le solide est au repos de sorte que son énergie mécanique E_m reste constante. Il est incompressible et indilatable ($V = cste$) donc le travail des forces de pression $\delta W_p = -P_{ext} dV$ est nul et sa variation d'énergie interne de la forme $dU = mc dT$. Enfin le solide est opaque de sorte qu'il ne transporte pas d'énergie thermique par rayonnement.



Le transport de l'énergie thermique étant **axial** (selon l'axe de révolution (Ox) du cylindre), le problème est **unidimensionnel** :

$$\vec{j}_{th}(x, t) = j_{th}(x, t) \vec{u}_x$$

la grandeur $j_{th}(x, t)$ est algébrique. Si $j_{th}(x, t) < 0$ alors le transfert thermique est inversé (de la droite vers la gauche).

On considère comme **sous-système fermé la tranche de solide comprise entre x et $x + dx$** de volume $d\tau = S \, dx$. D'après le 1er principe appliqué entre t et $t + dt$:

$$\begin{aligned} [\delta U(t + dt) + \delta E_m(t + dt)] - [\delta U(t) + \delta E_m(t)] &= \delta W + \delta Q \\ d(\delta U) + d(\delta E_c) + d(\delta E_p) &= \delta W + \delta Q \\ \text{système au repos } d(\delta E_c) &= 0 \\ \text{et } d(\delta E_p) &= 0 \\ \text{système indéformable } \delta W = -PdV &= 0 \\ \delta Q &= \delta Q_{ech} + \delta Q_{cr} \end{aligned}$$

♡ Le bilan d'énergie exprime que l'augmentation entre t et $t + dt$ de l'énergie interne du système centré en x fixé est égale au flux thermique entrant $\phi_e(x, t)$ en x pendant dt moins le flux thermique sortant $\phi_s(x + dx, t)$ en $x + dx$ pendant dt plus l'énergie thermique créée au sein du système (*in situ*).

5.2 Variation d'énergie interne

Le système est un solide indéformable et indilatable de masse $\delta m = \mu S \, dx$ situé en x fixé. Son énergie interne est notée δU car le système est petit. On exprime sa variation entre t et $t + dt$, puis on effectue un **dl au 1er ordre** en dt :

$$\begin{aligned} \text{dl au 1er ordre } d(\delta U) &= \delta m [u(x, t + dt) - u(x, t)] = \mu \frac{\partial u}{\partial t} dt S \, dx \\ d(\delta U) &= \delta m c [T(x, t + dt) - T(x, t)] = \mu c \frac{\partial T}{\partial t} dt S \, dx \neq \delta m c \, dT \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} T &= T(x, t) \\ \text{la différentielle est } dT &= \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial t} dt \end{aligned}$$

5.3 Energie thermique échangée

La puissance thermique totale échangée (ou transférée) par le système à travers la surface de contrôle fixe qui délimite le système est :

$$\begin{aligned}
 \phi_e(x, t) - \phi_s(x + dx, t) &= \iint_{(S_x)} j_{th}(x, t) \vec{u}_x \cdot dS \vec{n}_e - \iint_{(S_{x+dx})} j_{th}(x + dx, t) \vec{u}_x \cdot dS \vec{n}_s \\
 \text{or } \vec{n}_e(x) &= \vec{n}_s(x + dx) = \vec{u}_x \\
 \phi_e(x, t) - \phi_s(x + dx, t) &= j_{th}(x, t) \iint_{(S_x)} dS - j_{th}(x + dx, t) \iint_{(S_{x+dx})} dS \\
 \text{or } \iint_{(S_x)} dS &= \iint_{(S_{x+dx})} dS = S \\
 \text{d'où } \phi_e(x, t) - \phi_s(x + dx, t) &= -\frac{[j_{th}(x + dx, t) - j_{th}(x, t)]}{dx} dx S \\
 \phi_e(x, t) - \phi_s(x + dx, t) &= -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx S
 \end{aligned}$$

Dans le cas général à 3 dimensions ($d\tau = dx dy dz$), on admet qu'on obtient :

$$\begin{aligned}
 \phi_e(\vec{r}, t) - \phi_s(\vec{r} + d\vec{r}, t) &= -\left(\frac{\partial j_{th,x}}{\partial x} + \frac{\partial j_{th,y}}{\partial y} + \frac{\partial j_{th,z}}{\partial z}\right) dx dy dz \\
 \phi_e(\vec{r}, t) - \phi_s(\vec{r} + d\vec{r}, t) &= -div(\vec{j}_{th}) d\tau
 \end{aligned}$$

♡ L'opérateur **divergence** s'applique toujours à un vecteur et son résultat est toujours un scalaire. Il est défini en cartésiennes par :

$$\begin{aligned}
 div &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \\
 div &= \vec{\nabla} \cdot
 \end{aligned}$$

5.4 Les sources de chaleur in situ

En général, l'énergie thermique **créée à l'intérieur du système** constitué du volume mésoscopique de solide peut s'écrire sous la forme $p_v d\tau dt$ où p_v (en W.m^{-3}) est la **puissance thermique volumique créée** en sein du système.

5.4.1 Effet Joule

Si la tranche de solide est parcourue par un courant électrique d'intensité I alors sa résistance dR génère l'énergie thermique $dRI^2 dt$ par **effet Joule** avec :

$$dR = \frac{dx}{\gamma S}$$

où γ (en $\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$) désigne la conductivité électrique du solide.

5.4.2 Réaction nucléaire

Si la tranche de solide est le siège d'une réaction nucléaire alors l'énergie créée *in situ* est l'**énergie de masse** ($-dm c^2$) où c désigne la célérité de la lumière dans le vide (et non pas la capacité thermique massique du solide). Ainsi, une diminution de masse $dm < 0$ correspond bien à un gain d'énergie.

5.4.3 Réaction chimique

Si la tranche de solide est le siège d'une réaction chimique alors l'énergie créée *in situ* est $-\Delta_r U d\xi$ où ξ désigne l'avancement de la réaction. Ainsi une réaction **exothermique** ($\Delta_r U < 0$) correspond bien à un gain d'énergie pour la tranche de solide.

5.5 Bilan d'énergie à une dimension

Finalement le bilan d'énergie s'écrit :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} S dx dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx dt + p_v S dx dt$$

Cette égalité est vraie quels que soient dt et $d\tau = S dx$ d'où :

L'équation locale de conservation de l'énergie à une dimension est :

$$\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial t} = p_v$$

On l'appelle aussi **équation de continuité**.

5.6 Bilan d'énergie à trois dimensions

A trois dimensions l'équation de continuité s'écrit :

$$\text{div}(\vec{j}_{th}) + \mu \frac{\partial u}{\partial t} = p_v$$

6 Loi de Fourier (1822)

6.1 Conductivité thermique

♡ Joseph Fourier a constaté **expérimentalement** que $\vec{j}_{th}$ était proportionnel à $\overrightarrow{\text{grad}T}$ selon la loi :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$$

L'USI de λ est telle que :

$$\begin{aligned} [\vec{j}_{th}] &= [\lambda][\overrightarrow{\text{grad}T}] \\ W.m^{-2} &= [\lambda]K.m^{-1} \\ \text{car } dim(\overrightarrow{\text{grad}}) &= L^{-1} \\ \text{d'où } [\lambda] &= W.K^{-1}.m^{-1} \end{aligned}$$

- cette loi n'est pas universelle mais **phénoménologique** car elle n'est pas démontrée.
- la constante positive de proportionnalité notée λ est la **conductivité thermique** du solide.
- $\overrightarrow{\text{grad}T}$ est dirigé dans le sens où la fonction $T(x, t)$ est croissante (du froid vers le chaud).
- on a bien $\vec{j}_{th}$ dirigé du chaud vers le froid grâce au signe $-$.
- relation **linéaire** entre le flux thermique (l'effet) et la variation de T (la cause).
- valable seulement dans les cas où les variations de T sont **petites** sinon il n'y a plus linéarité.
- Les surfaces **isothermes** (ensemble des points où $T = cste$) sont perpendiculaires à $\overrightarrow{\text{grad}T}$ et donc à $\vec{j}_{th}$.

6.2 Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

- Physicien et mathématicien français.
- Il est célèbre pour sa *Théorie analytique de la chaleur*. Il a ainsi déterminé, par le calcul, la propagation de la chaleur en utilisant la décomposition d'une fonction quelconque en une série trigonométrique convergente. De telles fonctions sont appelées séries de Fourier ; la méthode de calcul permettant de façon réversible de passer d'une fonction à la série trigonométrique correspondante est la transformation de Fourier. Les domaines d'application de ses outils : vibrations, acoustique, électricité, etc... Le développement de ces domaines d'applications aboutira au XXe siècle à la naissance du **traitement du signal**.
- Avec l'âge Fourier manifeste une sensibilité excessive au froid. Arago note : « notre confrère se vêtait, dans la saison la plus chaude de l'année, comme ne le sont même pas les voyageurs condamnés à hiverner au milieu des glaces polaires ».

6.3 Ordres de grandeur

Il faut connaître quelques ordres de grandeur :

Matériau	Cuivre	Granite	Béton	Bois	Eau (l)	Air	Acier
λ en $W.K^{-1}.m^{-1}$	4.10^2	2,8	1,4	0,2	0,6	$2,6.10^{-2}$	50

Les conducteurs suivants sont :

- mauvais (gaz statique, polystyrène expansé) si $\lambda < 0,1 W.K^{-1}.m^{-1}$. Ce sont donc de très bons isolants thermiques ;
- moyens (bois, verre, eau, béton) si $0,1 < \lambda < 10 W.K^{-1}.m^{-1}$;

- très bons (métaux) si $200 < \lambda < 400 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

Un courant gazeux (ex : courant d'air) est un très bon conducteur thermique (par convection) et donc très mauvais isolant. En revanche, un gaz au repos est un très bon isolant, utilisé dans les doubles vitrages ou les calorimètres (vase Dewar).

7 Equation de la diffusion thermique

7.1 Cas unidimensionnel

Déterminons l'équation qui pilote l'évolution du champ de $T(x, t)$ en l'absence de sources ($p_v = 0$).

On a obtenu :

$$\text{d'après le bilan d'énergie } \frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\text{d'après la loi de Fourier } j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\text{d'où } \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\lambda \text{ est constant } \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

♥ L'équation de la chaleur ou de la diffusion thermique régit l'évolution spatio-temporelle de la température. En l'absence de sources, elle s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

où le coefficient D_{th} (en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) est appelé **diffusivité thermique** ou coefficient de diffusion du matériau :

$$D_{th} = \frac{\lambda}{\mu c}$$

Voici quelques ordres de grandeur :

Matériau	Cuivre	Granite	Béton	Bois	Eau	Air
D_{th} en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$	$1, 2.10^{-4}$	$1, 4.10^{-6}$	7.10^{-7}	$1, 3.10^{-7}$	$1, 5.10^{-6}$	$2, 2.10^{-5}$

7.2 Squelette algébrique d'une équation de diffusion

Ne pas confondre **équation de continuité** ou **équation locale de conservation de l'énergie** qui est l'équation qui relie $j_{th}(M, t)$ à $T(M, t)$ ou $u(M, t)$ avec l'**équation de diffusion thermique** qui relie les variations temporelles de $T(M, t)$ à ses variations spatiales. L'équation de la chaleur est une **équation aux dérivées partielles** sur le champ de température $T(M, t)$. D'une façon générale,

♡ le **squelette algébrique d'une équation de diffusion** à une dimension (en l'absence de sources) est $\frac{\partial}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ avec le coefficient de diffusion $[D] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

7.3 Cas général à 3 dimensions

L'équation qui pilote l'évolution du champ (eulérien) de température $T(x, y, z, t)$ (en l'absence de sources) est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

♡ On définit l'**opérateur Laplacien scalaire** Δ en cartésiennes par :

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \Delta &= \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} = \nabla^2 \end{aligned}$$

Il s'applique à un scalaire et son résultat est un scalaire.

Remarque :

D'après le programme, l'opérateur Laplacien n'est exigible qu'en cartésiennes. Par conséquent, dans un problème à géométrie cylindrique ou sphérique, l'expression du Laplacien sera donnée. Ne pas confondre le laplacien (homogène à L^{-2}) avec une variation.

L'équation de la chaleur à 3 dimensions (en l'absence de sources) est $\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T$

Comme l'équation de la chaleur est **linéaire le théorème de superposition sera valable et la méthode des nombres complexes applicable** (cf. ondes thermiques).

Cas particulier important :

♡ En **régime stationnaire**, le problème est indépendant du temps t et donc tous les champs eulériens sont indépendants du temps soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \text{d'où l'équation de Laplace } \Delta T = 0 \quad \text{en l'absence de sources}$$

7.4 Problème monodimensionnel cylindrique

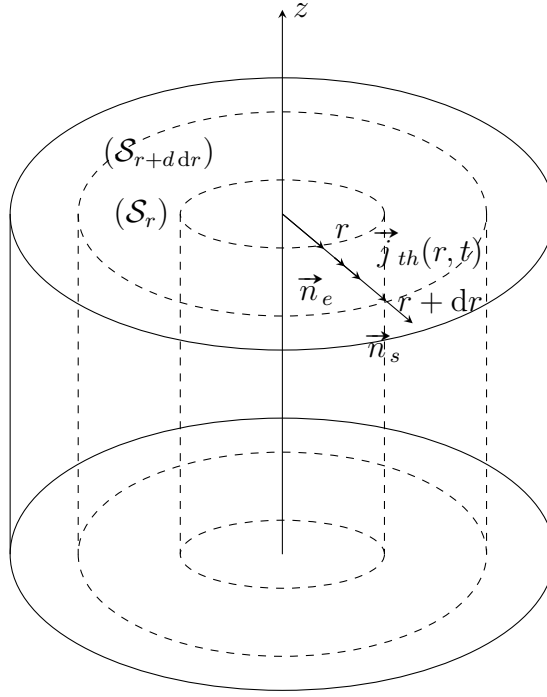
Soit un solide de forme cylindrique d'axe (Oz) de hauteur h et de rayon R . La région plus chaude est sur l'axe et la région plus froide à l'extérieur. Par exemple, un fil confondu avec l'axe et parcouru par un courant d'intensité I produit de la chaleur par effet Joule. On cherche donc un champ de température de la forme $T(r, t)$ car invariant par rotation θ et par translation le

long de l'axe (Oz) (les effets de bord sont négligés). Il s'agit donc d'un problème à **symétrie cylindrique**. Il est monodimensionnel car la seule dimension spatiale est r .

$$\overrightarrow{\text{grad}T} = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{u}_z$$

Le transfert thermique est donc lui aussi radial et d'après la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th} = j_{th}(r, t) \vec{u}_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r$$



On réalise un bilan d'énergie entre t et $t + dt$ dans le solide en considérant comme système le **manchon cylindrique** (en pointillés) de hauteur h compris entre r et $r + dr$ de volume $d\tau = 2\pi r h dr$:

$$\begin{aligned} \mu c d\tau [T(r, t + dt) - T(r, t)] &= \phi_e(r, t) dt - \phi_s(r + dr, t) dt + p_v d\tau dt \\ \mu c 2\pi r h dr \frac{[T(r, t + dt) - T(r, t)]}{dt} &= \iint_{(S_r)} j_{th}(r, t) \vec{u}_r \cdot dS \vec{n}_e - \iint_{(S_{r+dr})} j_{th}(r + dr, t) \vec{u}_r \cdot dS \vec{n}_s + p_v 2\pi r h dr \\ \text{or } \vec{n}_e &= \vec{n}_s = \vec{u}_r \\ \mu c 2\pi r h dr \frac{\partial T}{\partial t} &= j_{th}(r, t) \iint_{(S_r)} dS - j_{th}(r + dr, t) \iint_{(S_{r+dr})} dS + p_v 2\pi r h dr \\ \mu c 2\pi r h dr \frac{\partial T}{\partial t} &= j_{th}(r, t) 2\pi r h - j_{th}(r + dr, t) 2\pi (r + dr) h + p_v 2\pi r h dr \\ \mu c \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{(r + dr) j_{th}(r + dr, t) - r j_{th}(r, t)}{dr} + p_v \end{aligned}$$

Remarques :

- Le terme p_v représente l'éventuelle source dans la tranche quelconque située entre r et $r + dr$ et non pas l'effet Joule par le fil en $r = 0$!
- Les surfaces ne sont pas égales contrairement au cas de la diffusion axiale !

L'équation de continuité est donc :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} + p_v$$

On en déduit l'équation de la diffusion par application de la loi de Fourier :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D_{th}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{p_v}{\mu c}$$

Attention ! On ne cherchera surtout pas à développer la dérivée. Cette forme compacte est la plus simple pour intégrer par la suite.

En admettant l'expression du laplacien en cylindriques et en tenant compte de l'invariance par rotation d'angle θ et par translation le long de l'axe (Oz) :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

On retrouve donc la forme générale de l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T + \frac{p_v}{\mu c}$$

7.5 Problème monodimensionnel sphérique

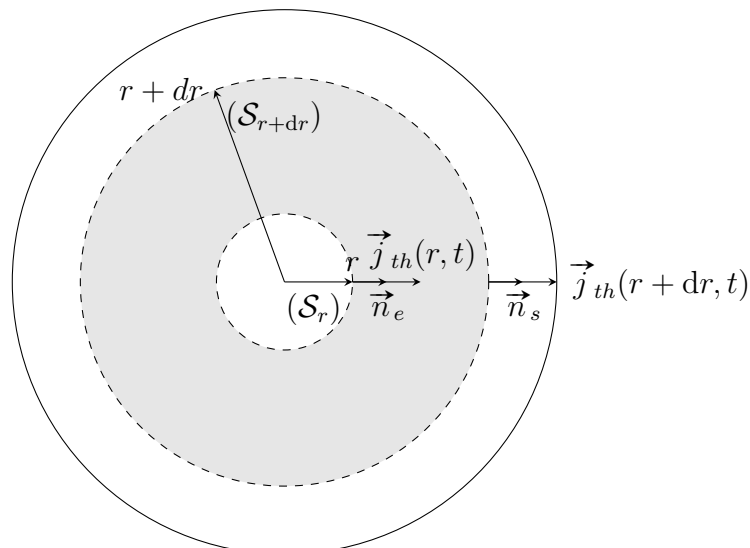
Dans le globe terrestre la radioactivité de fission est la principale source de chaleur.

Modélisons la Terre par une sphère de centre O de rayon R . La zone plus chaude est au centre. On cherche donc un champ de température de la forme $T(r, t)$ car invariant par rotation θ et φ autour du centre O . Il s'agit donc d'un problème à **symétrie sphérique**. Il est monodimensionnel car la seule dimension spatiale est r .

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

Le transfert thermique est donc lui aussi radial et d'après la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th} = j_{th}(r, t) \vec{u}_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r$$



On réalise un bilan d'énergie entre t et $t + dt$ dans le solide en considérant comme système la **couronne sphérique** (en gris) de centre O comprise entre r et $r + dr$ de volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$:

$$\begin{aligned} \mu c 4\pi r^2 dr \frac{[T(r, t + dt) - T(r, t)]}{dt} &= \iint_{(S_r)} j_{th}(r, t) \vec{u}_r \cdot dS \vec{n}_e - \iint_{(S_{r+dr})} j_{th}(r + dr, t) \vec{u}_r \cdot dS \vec{n}_s + p_v 4\pi r^2 dr \\ \text{or } \vec{n}_e &= \vec{n}_s = \vec{u}_r \\ \mu c 4\pi r^2 dr \frac{\partial T}{\partial t} &= j_{th}(r, t) \iint_{(S_r)} dS - j_{th}(r + dr, t) \iint_{(S_{r+dr})} dS + p_v 4\pi r^2 dr \\ \mu c 4\pi r^2 dr \frac{\partial T}{\partial t} &= j_{th}(r, t) \iint_{(S_r)} dS - j_{th}(r + dr, t) \iint_{(S_{r+dr})} dS + p_v 4\pi r^2 dr \\ \mu c 4\pi r^2 dr \frac{\partial T}{\partial t} &= j_{th}(r, t) 4\pi r^2 - j_{th}(r + dr, t) 4\pi (r + dr)^2 + p_v 4\pi r^2 dr \\ \mu c \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{r^2} \frac{(r + dr)^2 j_{th}(r + dr, t) - r^2 j_{th}(r, t)}{dr} + p_v \end{aligned}$$

L'équation de continuité est donc :

$$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j_{th})}{\partial r} + p_v}$$

Remarques :

- Le terme p_v représente la source dans la couronne sphérique quelconque située entre r et $r + dr$ et non pas la source radioactive située en $r = 0$!
- Les surfaces ne sont pas égales !

On en déduit l'équation de la diffusion par application de la loi de Fourier :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D_{th}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{p_v}{\mu c}}$$

Attention ! On ne cherchera surtout pas à développer la dérivée. Cette forme compacte est la plus simple pour intégrer par la suite.

En admettant l'expression du laplacien en sphériques et en tenant compte de l'invariance par rotation d'angle θ et φ autour de O :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

On retrouve donc la forme générale de l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T + \frac{p_v}{\mu c}$$

Dans l'exemple de la Terre, la source se situe en O seulement. Il n'y a donc pas de terme source ($p_v = 0$) dans le bilan sur une couronne sphérique.

7.6 Irréversibilité

Comment se manifeste mathématiquement l'irréversibilité dans l'équation de la chaleur ?

♡ L'équation de la chaleur traduit un phénomène irréversible à cause de la **dérivée 1ère temporelle** qui n'est pas invariante par **inversion de la flèche du temps** qui consiste à transformer t en $-t$. L'irréversibilité est donc responsable d'une **création d'entropie**.

♡ Enoncé (historique) de Clausius du 2nd principe de la Thermodynamique :

Il est impossible de transférer de l'énergie thermique du froid vers le chaud sans dépenser de travail W .

A l'inverse, le transfert thermique du chaud vers le froid est spontané puisqu'il ne nécessite pas de travail W . Le transfert thermique est donc un phénomène irréversible.

7.7 Echelles caractéristiques

Notons δ la distance caractéristique et τ le temps caractéristique du phénomène de diffusion thermique. Supposons que T et $\frac{\partial T}{\partial x}$ ont la même distance caractéristique δ . De même, supposons que T et $\frac{\partial T}{\partial t}$ ont le même temps caractéristique τ . On a en **ordre de grandeur** :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x} &\approx \frac{T}{\delta} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) &\approx \frac{1}{\delta} \frac{T}{\delta} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &\approx \frac{T}{\tau} \\ \text{d'après eqt diffusion } \frac{T}{\tau} &\approx D_{th} \frac{T}{\delta^2}\end{aligned}$$

Finalement :

♡ Le temps caractéristique τ est lié à la distance caractéristique δ par :

$$\tau \approx \frac{\delta^2}{D_{th}}$$

On constate que :

- si δ est $\times 10$ alors τ est $\times 100$!
- il apparaît donc une **dissymétrie de comportement entre le temps et l'espace typique des phénomènes diffusifs**.

- on peut avoir recours à la convection pour homogénéiser la température plus rapidement car la diffusion thermique est trop lente. *Exemple* : on tourne la cuillère dans la tasse à café.

♡ Les phénomènes diffusifs ne sont efficaces (assez rapides) qu'à petite échelle spatiale δ . Sur de grandes distances ils sont lents.

Dans un problème, il faut **savoir identifier la distance caractéristique** δ .

Dans l'exemple du cylindre :

- si $\vec{j}_{th}$ est axial alors $\delta \approx L$ la longueur du cylindre (mesurée le long de l'axe).
- si $\vec{j}_{th}$ est radial alors $\delta \approx R$ le rayon du cylindre.

Exemple : une lame d'acier $D_{acier} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ de longueur $L = 10 \text{ cm}$. On ressent l'augmentation de la température au bout de :

$$\tau = \frac{(0,10)^2}{2 \cdot 10^{-5}} = 0,5 \cdot 10^{-2+5} = 5 \cdot 10^2 \text{ s} = \frac{5}{60} \cdot 10^2 \text{ min} \approx 8 \text{ min}$$

8 Conditions aux limites

Méthode :

Pour résoudre l'équation de la chaleur il faut connaître :

- les conditions initiales (CI) soit $T(M, t = 0)$.
- les conditions aux limites (CL) sont les contraintes à tout instant sur les frontières limitant le système du milieu extérieur.

8.1 Contact entre un solide et un fluide

Il existe un $\vec{\text{grad}}T \neq \vec{0}$ dans le fluide au voisinage du solide pour raccorder la température T_s à la surface du solide à la température T_0 du fluide. Un phénomène diffusif est donc localisé dans une couche limite de $q/q \text{ mm}$ d'épaisseur. Ailleurs dans le fluide, la convection évacue le flux thermique reçu à travers la couche limite. Un **transfert conducto-convectif** est donc mis en jeu à l'interface entre un solide et un fluide.

La **loi phénoménologique de Newton** dit que le **transfert conducto-convectif** est proportionnel à l'écart de température entre la surface du solide et le fluide, à la surface et à la durée :

$$\delta Q_{cc} = h (T_s - T_0) dS dt$$

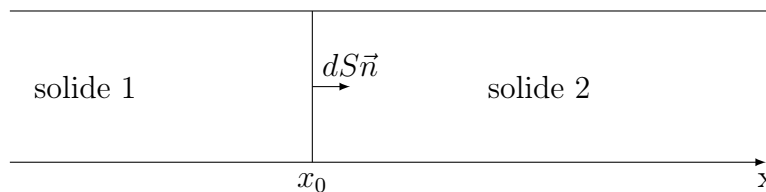
On définit le vecteur densité de courant lié au transfert conducto-convectif par

$$\vec{j}_{cc} = h (T_s - T_0) \vec{n}$$

- Le sens de $\vec{j}_{cc}$ (celui où $\delta Q_{cc} > 0$) correspond à la **convention récepteur** en associant l'analogie d'une flèche-tension à l'écart de température $(T_s - T_0) > 0$;
- le coefficient h de proportionnalité est appelé coefficient conducto-convectif : $h_{liq} > h_{gaz}$;
- h est multiplié par 10 dans le cas d'une convection forcée. Exemple : un four à chaleur tournante est équipé d'un ventilateur qui force la convection. Ainsi les aliments sont cuits plus efficacement que dans un four classique ;
- à la limite si $h \rightarrow +\infty$ alors $T_s \rightarrow T_0$ car le transfert thermique δQ_{cc} doit rester borné. On dit alors que **le contact thermique est parfait** ;
- la température à la surface du solide T_s est une inconnue ;
- il faut savoir utiliser la loi de Newton fournie car sa formule n'est pas exigible.

8.2 Contact entre deux solides

Le flux thermique est continu sinon il y aurait accumulation d'énergie à l'interface.



♡ A l'interface entre deux solides fixes ($x = x_0$) :

- La composante normale de $\vec{j}_{th}$ est continue car le flux thermique à travers l'interface est continu $\vec{j}_{th,1}(x = x_0^-) \cdot \vec{n} = \vec{j}_{th,2}(x = x_0^+) \cdot \vec{n}$
En régime stationnaire $\lambda_1 \left(\frac{dT_1}{dx} \right)_{(x=x_0^-)} = \lambda_2 \left(\frac{dT_2}{dx} \right)_{(x=x_0^+)}$
Par conséquent, à l'interface entre deux solides, le profil de température $T(x)$ présente une discontinuité de pente $\left(\frac{dT_1}{dx} \right)_{(x=x_0^-)} \neq \left(\frac{dT_2}{dx} \right)_{(x=x_0^+)}$ car $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
- Les transferts par convection étant impossibles le contact thermique est toujours parfait ce qui impose la continuité de la température $T_1(x = x_0^-) = T_2(x = x_0^+)$

8.3 Contact avec une paroi calorifugée

Dans le cas où l'interface entre les deux milieux est calorifugée le flux thermique qui la traverse est nul :

♡ Une paroi calorifugée impose la nullité de la composante normale de $\vec{j}_{th}$.

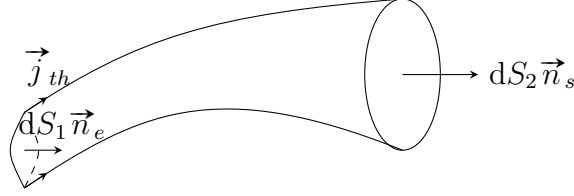
$$\vec{j}_{th} \cdot \vec{n} = 0$$

Par conséquent $T(x)$ est extremum à l'interface calorifugée $\left(\frac{dT}{dx} \right)_{(x=x_0)} = 0$

9 Régimes stationnaires et absence de source

En l'absence de source $p_v = 0$.

9.1 Conservation du flux thermique



♡ Par définition un tube de champ est l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé. Une ligne de champ est en tout point tangente au champ de vecteur et orientée dans le même sens.

Dans le milieu siège d'un phénomène de diffusion considérons un tube de champ ($\mathcal{T}$) de $\vec{j}_{th}$ qui s'appuie sur les surfaces S_1 et S_2 . En régime stationnaire le tube ne se déforme pas au cours du temps. Le 1er principe appliqué au tube donne en l'absence de source :

$$0 = \phi_{1,e} dt - \phi_{2,s} dt \quad \text{soit} \quad \phi_{1,e} = \phi_{2,s} = \phi$$

♡ **En régime stationnaire et en l'absence de source le flux thermique ϕ se conserve** puisqu'un tube de champ transporte un flux thermique ϕ constant.

Analogie entre l'intensité du courant électrique $I = \frac{\delta q}{dt} = \iint_{(S)} \vec{j}_{el} \cdot dS\vec{n}$ et le flux thermique $\phi = \frac{\delta E_{th}}{dt} = P_{th} = \iint_{(S)} \vec{j}_{el} \cdot dS\vec{n}$.

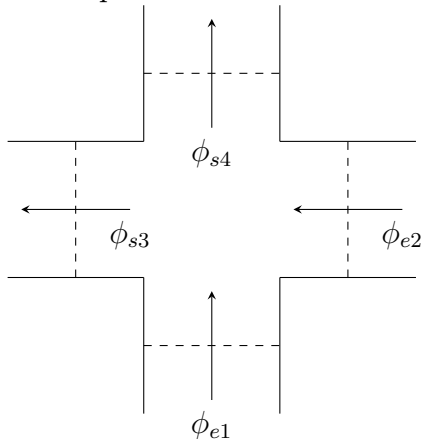
I est un débit de charges électriques q à travers la surface (S).

$\phi = P_{th}$ est un débit d'énergie thermique E_{th} à travers la surface (S).

9.2 Loi des nœuds

Soient N tubes de champ ($\mathcal{T}_k$) convergeant vers un nœud N et notons ϕ_k les flux thermiques associés. Le 1er principe appliqué à la surface fermée qui entoure le nœud N conduit, en régime stationnaire et en l'absence de source, à la loi des nœuds $\sum_{k=1}^N \phi_k = 0$

En régime permanent et en l'absence de source, l'accumulation d'énergie thermique dans le matériau est impossible.



Conservation du flux thermique :

$$\phi_{e,1} + \phi_{e,2} = \phi_{s,3} + \phi_{s,4}$$

9.3 Théorème d'Ostrogradski

♡ Une **surface fermée** délimite un intérieur et un extérieur (contrairement à une surface ouverte) et s'oriente normalement (perpendiculairement) de l'intérieur vers l'extérieur c'est-à-dire dans le **sens SORTANT**.

♡ D'après le théorème d'Ostrogradski appliqué à la surface fermée (Σ) qui délimite le tube de champ ($\mathcal{T}$) :

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{T})} \text{div}(\vec{j}_{th}) d\tau$$

D'après le bilan en absence de sources :

$$\text{div}(\vec{j}_{th}) + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\text{En régime stationnaire } \text{div}(\vec{j}_{th}) = 0 \quad \text{d'où } \oint_{(\Sigma)} \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\text{or } \phi_{tot,s} = \phi_{1,s} + \phi_{2,s} + \phi_{lat,s} \quad \text{avec } \phi_{1,s} = -\phi_{1,e}$$

$$\text{et } \phi_{lat,s} = 0 \quad \text{d'où } \phi_{1,e} = \phi_{2,s} = \phi$$

♡ En **régime stationnaire et absence de sources**, $\vec{j}_{th}$ est à **flux conservatif** car $\text{div}(\vec{j}_{th}) = 0$. Un tube de champ transporte alors un flux thermique ϕ constant.

$\phi_{1,e} = \phi_{2,s}$ implique que si la section du tube augmente alors j_{th} diminue : si les lignes de champ (LDC) se resserrent/s'évasent alors j_{th} augmente/diminue.

$\vec{j}_{th}$ est conservatif seulement si les LDC sont rectilignes et parallèles. Le tube de champ est alors à section constante.

9.4 Résistance thermique

La résistance thermique d'un matériau mesure l'opposition de ce dernier au transport de l'énergie thermique.

9.4.1 Exercice

Déterminons la loi de température à l'intérieur d'un mur d'habitation en béton dont la conductivité thermique vaut $\lambda = 1,4 \text{ USI}$, d'épaisseur $L = 20 \text{ cm}$ et de surface $S = 10 \text{ m}^2$. La température extérieure est de $T_{ext} = 0^\circ \text{ C}$ et la température intérieure est $T_{int} = 20^\circ \text{ C}$.

En régime stationnaire et en l'absence de source, l'équation de la chaleur à une dimension est la loi de Laplace $\Delta T = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ d'où $T(x) = Ax + B$

$$\text{CAL1 } T(x=0) = T_{int} \quad \text{CAL2 } T(x=L) = T_{ext} = AL + B$$

$$\text{d'où } A = \frac{T_{ext} - T_{int}}{L} < 0$$

Profil de température affine $T(x) = \frac{T_{ext} - T_{int}}{L}x + T_{int}$

La température décroît linéairement de l'intérieur vers l'extérieur.

Attention ! Dans un problème à symétrie cylindrique ou sphérique la résolution de l'équation de Laplace $\Delta T = 0$ ne conduit pas à un profil linéaire de température compte-tenu de l'expression de l'opérateur laplacien en cylindriques et en sphériques.

Puis on en déduit le flux thermique ϕ . En régime permanent le flux thermique se conserve :

$$\phi = j_{th}S = cste \quad \text{d'après la loi de Fourier } j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\phi = \lambda \frac{S}{L} (T_{int} - T_{ext})$$

Application numérique : $\phi = 1,4 \frac{10}{0,20} (20 - 0)$ d'où $\phi_{beton} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ W}$

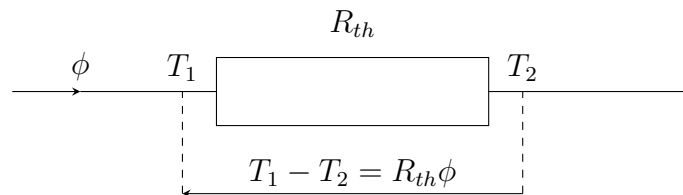
Que devient le flux thermique ϕ avec un mur de 20 cm de bois de conductivité thermique $\lambda = 0,2 \text{ USI}$ à la place du béton ?

$$\phi = 0,2 \frac{10}{0,20} (20 - 0) \quad \phi_{bois} = 2 \cdot 10^2 \text{ W}$$

On constate que **le bois est un meilleur isolant thermique que le béton** car :

$$\phi_{bois} < \phi_{beton}$$

9.4.2 Analogie avec la loi d'Ohm



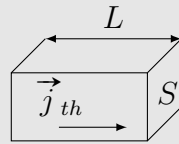
En conduction électrique une différence de potentiel électrique $U = \Delta V = V_1 - V_2$ provoque un flux de charges libres c'est-à-dire un courant d'intensité I .

En conduction thermique une différence de température ($T_1 - T_2 > 0$) provoque un flux thermique $\phi > 0$ liés par la **convention récepteur**.

électrique	thermique
Tension : $U = V_1 - V_2$	$T_1 - T_2$ en K
intensité $I = \iint \vec{j}_e \cdot dS\vec{n}$	flux $\phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot dS\vec{n}$ en W
loi d'Ohm locale : $\vec{j}_e = \gamma \vec{E} = -\gamma \text{grad}V$	loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \text{grad}T$
équation de continuité : $\text{div}(\vec{j}_e) = 0$	équation de continuité : $\text{div}(\vec{j}_{th}) = 0$
Loi d'Ohm : $R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{L}{\gamma S}$ en Ω	$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} = \frac{L}{\lambda S}$ en $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$
Conductance : $G = \frac{1}{R} = \frac{\gamma S}{L}$ en S	$G_{th} = \frac{1}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{L}$ en $\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$

Attention ! $R_{th} \phi^2$ est l'analogie de $R I^2$ mais ce n'est pas une puissance contrairement à $R I^2$. C'est ϕ qui est une puissance.

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S}$$



Calculons la résistance thermique du mur en béton et du mur en bois :

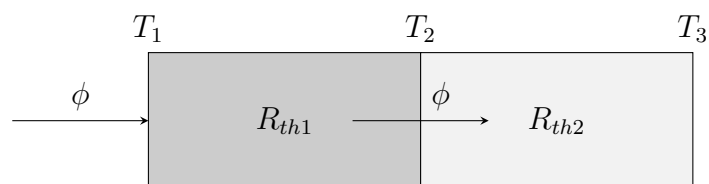
$$R_{th,beton} = \frac{0,2}{1,4 \times 10} = 0,014 \text{ K.W}^{-1}$$

$$R_{th,bois} = \frac{0,2}{0,2 \times 10} = 0,10 \text{ K.W}^{-1}$$

♡ La résistance thermique R_{th} ne dépend que du matériau et de sa géométrie : plus elle est élevée et plus le matériau est isolant.

Attention ! Les concepts de R_{th} et G_{th} ne sont valables qu'en régime stationnaire et en l'absence de sources.

9.4.3 Association série de résistances



Soient deux solides en contact en régime permanent.

La conservation du flux thermique donne en convention récepteur :

$$\text{pour le solide 1 on a } T_1 - T_2 = R_{th1} \phi$$

$$\text{pour le solide 2 on a } T_2 - T_3 = R_{th2} \phi$$

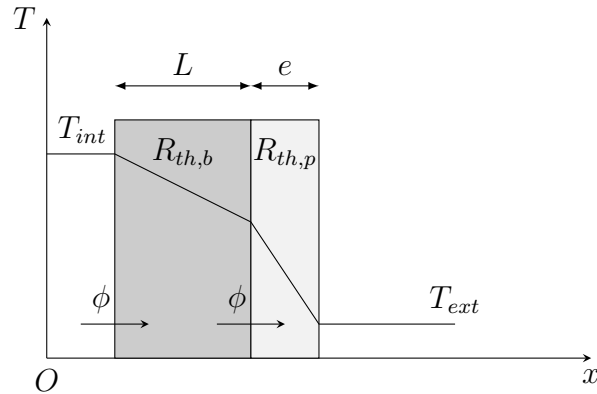
$$\text{pour l'ensemble solide 1 et 2 on a } T_1 - T_3 = R_{th} \phi$$

$$\text{d'où } T_1 - T_3 = (R_{th1} + R_{th2}) \phi$$

En identifiant :

$$R_{th} = R_{th1} + R_{th2}$$

♡ En série les résistances thermiques s'ajoutent.



On ajoute sur le mur de béton une couche de polystyrène expansé d'épaisseur e sur la face extérieure. Quelle est la nouvelle résistance thermique ?

C'est une association série de résistances thermiques :

$$R_{th} = R_{th,beton} + R_{th,poly}$$

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda_b S} + \frac{e}{\lambda_p S}$$

Continuité de en $x = L$:

$$\text{de la température } T_{beton}(x = L) = T_{poly}(x = L)$$

$$\text{et du flux thermique } \lambda_{beton} \left(\frac{dT_{beton}}{dx} \right)_{x=L} = \lambda_{poly} \left(\frac{dT_{poly}}{dx} \right)_{x=L}$$

9.4.4 Association parallèle de résistances

Soient deux solides placés entre les mêmes surfaces isothermes (ou équithermes) T_1 et T_2 . La loi des nœuds donne :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

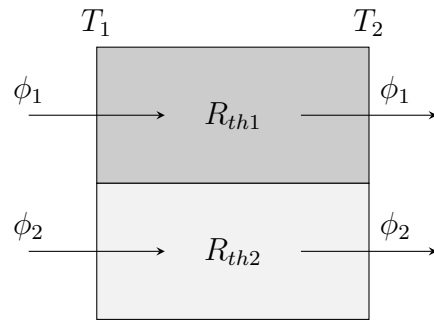
$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th1}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th2}} = (G_{th1} + G_{th2})(T_1 - T_2)$$

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = G_{th}(T_1 - T_2)$$

$$G_{th} = G_{th1} + G_{th2}$$

$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}$$

♡ En parallèle les conductances thermiques $G_{th} = \frac{1}{R_{th}}$ s'ajoutent.



Soit une salle de séjour comprenant deux baies vitrées, chacune de surface $S = 1 \text{ m}^2$ de verre d'épaisseur $e = 5 \text{ mm}$ et de conductivité $\lambda = 1 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$. Les températures extérieures et intérieures valent respectivement $T_{int} = 20^\circ \text{ C}$ et $T_{ext} = 10^\circ \text{ C}$. Calculer la puissance thermique ϕ dans l'atmosphère.

Les deux baies sont associées en parallèle. Leurs conductances thermiques s'ajoutent :

$$G_{th} = 2 \frac{\lambda S}{e}$$

$$\phi = G_{th}(T_{int} - T_{ext})$$

Finalement :

$$\phi = 2 \frac{\lambda S}{e} (T_{int} - T_{ext})$$

Application numérique :

$$\phi = 2 \times \frac{1 \times 1}{5 \cdot 10^{-3}} (20 - 10)$$

soit :

$$\phi = 4 \text{ kW}$$

9.4.5 Méthode

La notion de résistance thermique est très pratique. En effet, elle permet de calculer le flux thermique très rapidement (sans avoir à résoudre l'équation de Laplace). Dans l'exemple du cours :

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

$$\text{avec } R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S}$$

$$\text{d'où } \phi = \frac{\lambda S (T_1 - T_2)}{L}$$

En dehors de ce problème simple, il faut définir l'élément de volume où la formule $R = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S}$ est applicable. Puis on associe les résistances. Ainsi, quand $\vec{j}_{th}$ est radial dans un problème à symétrie :

- cylindrique, la résistance d'un manchon cylindrique est une association série :

$$\int_{(1)}^{(2)} dR_{th} = \frac{1}{\lambda 2\pi h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\text{soit } R_{th} = \frac{1}{\lambda 2\pi h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

- sphérique la résistance d'une couronne sphérique est une association série :

$$\int_{(1)}^{(2)} dR_{th} = \frac{1}{\lambda 4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{\lambda 4\pi} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2}$$

$$\text{soit } R_{th} = \frac{1}{\lambda 4\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

9.4.6 Loi de Newton

L'interface entre un solide et un fluide constitue une résistance thermique :

$$\phi = hS(T_s - T_0)$$

$$\text{or } R_{th} = \frac{(T_s - T_0)}{\phi}$$

d'où :

$$\boxed{R_{th} = \frac{1}{hS}}$$

9.5 ARQS thermique

Reprenons le cas d'un solide siège d'un phénomène de diffusion thermique unidimensionnelle avec $T(x=0) = T_1$ et $T(x=L) = T_2 < T_1$. La résolution de l'équation de Laplace $\Delta T = 0$ conduit au profil linéaire de température suivant :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

Si maintenant $T_1 = T_1(t)$ et $T_2 = T_2(t)$ évoluent très lentement dans le temps avec une constante de temps τ , alors le profil de température $T(x)$ précédent reste validé à condition que $\tau \gg \tau_{diff}$ avec $\tau_{diff} = \frac{L^2}{D_{th}}$.

♥ Tous les résultats établis en régime stationnaire, dont la notion de résistance thermique, sont validés dans l'**ARQS** encore appelé approximation des **régimes lentement variables** :

$$\tau \gg \frac{L^2}{D_{th}}$$

9.6 Circuits RC thermiques dans l'ARQS

Dans l'étude thermique d'un bâtiment, on considère comme système l'air et le mobilier qu'il contient.

Les deux paramètres importants pour la régulation de la température $T(t)$ au cours du temps sont :

- la capacité thermique C du système ;
- la résistance thermique R_{th} des murs.

On note T_0 la température de l'atmosphère extérieure.

Le premier principe appliqué entre t et $t + dt$ s'écrit :

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q_e = \phi dt = \frac{(T_0 - T(t))}{R_{th}} dt \\ \text{or } dU &= C dT \\ \text{d'où } \frac{dT}{dt} + \frac{T(t)}{\tau} &= \frac{T_0}{\tau} \\ \text{la constante de temps est } \tau &= R_{th}C \end{aligned}$$

$$\text{la solution est } T(t) = T_0 + (T(0) - T_0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Dans le cadre de l'ARQS, un système thermique, constitué d'un élément de stockage de l'énergie de capacité thermique C , qui échange de l'énergie à travers une résistance thermique R_{th} , se comporte en système du 1er ordre de constante de temps $\tau = R_{th}C$.

10 Capacité numérique

On souhaite déterminer l'évolution temporelle et spatiale du champ de température $T(x, t)$ dans une barre cylindrique de longueur $L = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$ dont la surface latérale est calorifugée. L'extrémité droite de la barre est en contact supposé parfait avec l'air de température $T_d = 20^\circ \text{C}$. Avant le début de l'expérience, toute la barre est à l'équilibre thermique avec l'air ambiant à T_d . A l'instant initial on établit le contact thermique de la barre avec une source chaude de température $T_g = 40^\circ \text{C}$ à l'extrémité gauche de la barre. Ce contact est supposé parfait.

10.1 Méthode

On découpe la barre en **tronçons** (pas spatial) de longueur $dx = 1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$. On mène l'étude sur une durée totale $\Delta t = 45 \text{ min} = 45 \times 60 \text{ s}$ avec un **pas temporel** $dt = 0,01 \text{ s}$.

La fonction $T(x, t)$ sera donc approximée par un tableau $T[i, j] = T(x = j \times dx, t = i \times dt)$ (numpy.array).

La ligne i du tableau donne le champ de température à l'instant $t = i \times dt$. En parcourant cette ligne de gauche à droite on a T en tout point de la barre de l'extrémité gauche $j = 0$ à l'extrémité droite en incrémentant j .

On note Nt et Nx le nombre total respectivement de lignes et de colonnes du tableau T de température. On crée aussi les listes x et t des positions respectivement des instants où T est évaluée. On commence par initialiser le tableau à 2 dimensions T en le remplissant de 0.

```

1  from pylab import* #contient numpy et matplotlib
2  dx=1e-2
3  dt=1e-2
4
5  L=0.5
6  Deltat=45*60
7
8  Nx=int(L/dx)+1
9  Nt=int(Deltat/dt)+1
10
11 x=[j*dx for j in range(Nx)]
12 t=[i*dt for i in range(Nt)]
13
14 T=zeros((Nt,Nx))

```

La 1ère ligne du tableau T spécifie les conditions initiales.

```

1  Tg=40
2  Td=20
3
4  T[0,0]=Tg
5  for j in range(1,Nx):
6      T[0,j]=Td

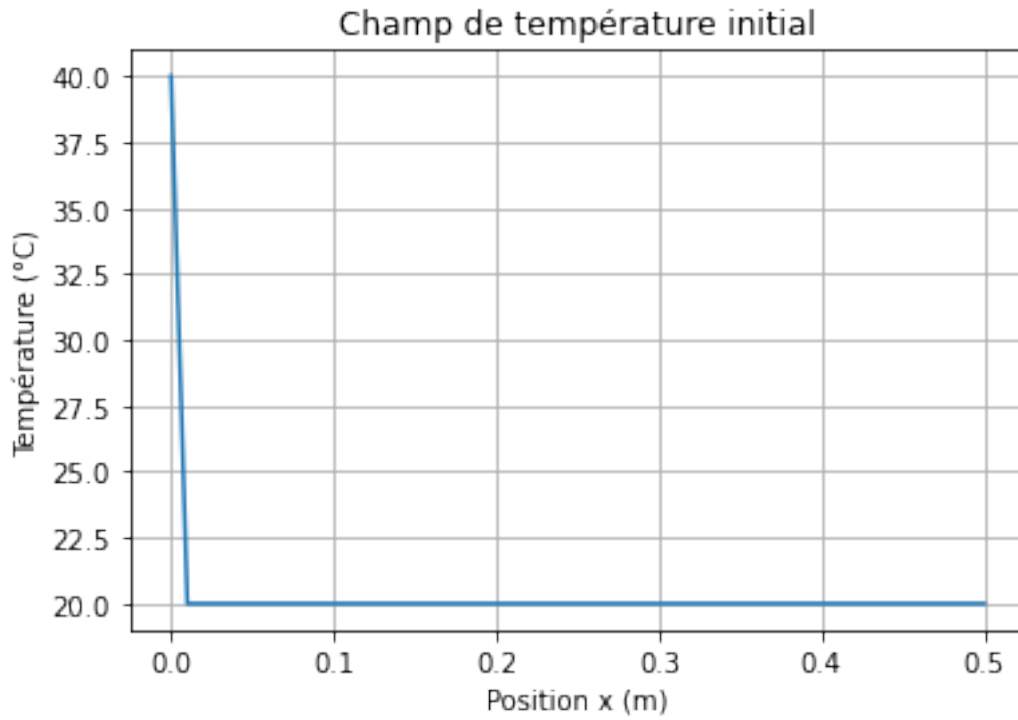
```

On commence par tracer le graphe de $T(x)$ à l'instant initial $t = 0$:

```

1  close()
2  figure()
3  plot(x,T[0,:])
4  grid()
5  xlabel("Position x (m)")
6  ylabel("Température (degré C)")
7  title("Champ de température initial")
8  show()

```



Puis on remplit le tableau T à tout instant t (autre que $t = 0$ car déjà traité) en imposant les conditions aux limites aux deux extrémités de la barre.

```

1  for i in range (1,Nt):
2      T[i,0]=Tg
3      T[i,-1]=Td

```

Désormais on résout l'équation de la diffusion thermique (sans source) à une dimension :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

D'après le développement de Taylor de $T(t, x)$ au 2nd ordre :

$$\begin{aligned}
 T(t, x + dx) &= T(t, x) + dx \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{(dx)^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + o((dx)^2) \\
 T(t, x - dx) &= T(t, x) - dx \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{(dx)^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + o((dx)^2) \\
 \text{d'où } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{T(t, x + dx) + T(t, x - dx) - 2T(t, x)}{(dx)^2} + o((dx)^2)
 \end{aligned}$$

On approxime la dérivée 2nde par la différence finie suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T[i, j + 1] + T[i, j - 1] - 2T[i, j]}{(dx)^2}$$

On approxime la dérivée 1ère par la différence finie (avant ou progressive) d'ordre 1 suivante :

$$\begin{aligned}
 T(t + dt, x) &= T(t, x) + dt \frac{\partial T}{\partial t} + o(dt) \\
 \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{T(t + dt, x) - T(t, x)}{dt} + o(dt)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T[i+1, j] - T[i, j]}{dt}$$

Résoudre l'équation de la diffusion se ramène donc au schéma numérique suivant :

$$T[i+1, j] - T[i, j] = \alpha (T[i, j+1] + T[i, j-1] - 2T[i, j])$$

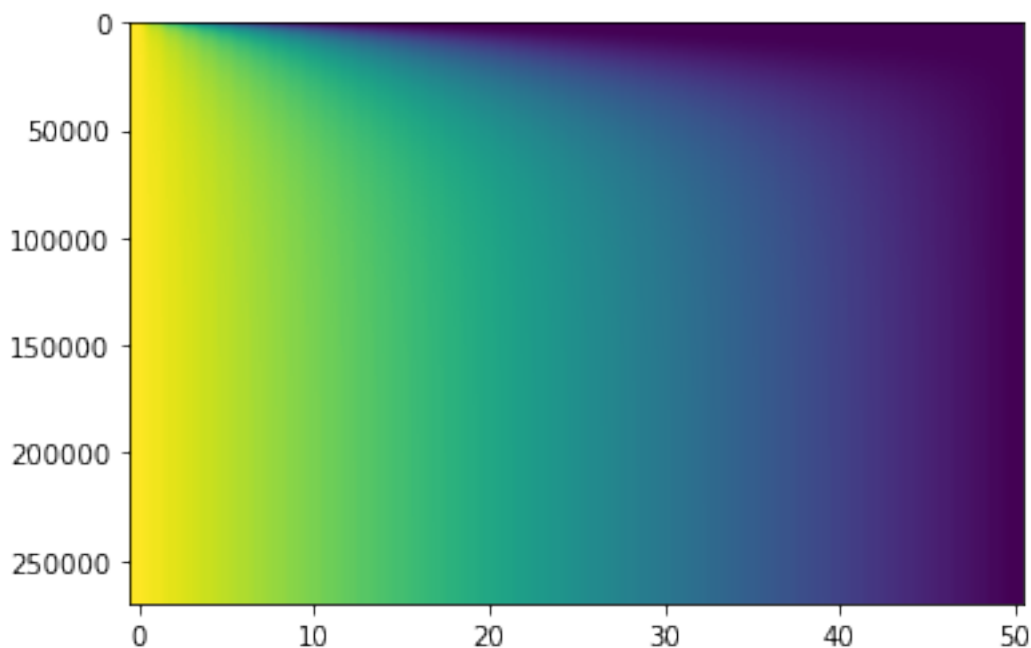
$$\alpha = \frac{D \, dt}{(dx)^2} = \frac{1.10^{-4} \times 10^{-2}}{(10^{-2})^2} = 10^{-2} < \frac{1}{2}$$

On peut montrer que ce schéma numérique converge si $\alpha < \frac{1}{2}$. On constate que le matériau choisi et les pas spatial et temporel permettent de valider cette condition. On implémente ce schéma numérique :

```
1 D=1e-4
2
3 for i in range(0, Nt-1):
4     for j in range(1, Nx-1):
5         T[i+1, j] = T[i, j] + D*dt / (dx*dx) * (T[i, j+1] + T[i, j-1] - 2*T[i, j])
```

On visualise le tableau T :

```
1 close()
2 figure()
3 imshow(T, aspect="auto")
4 show()
```



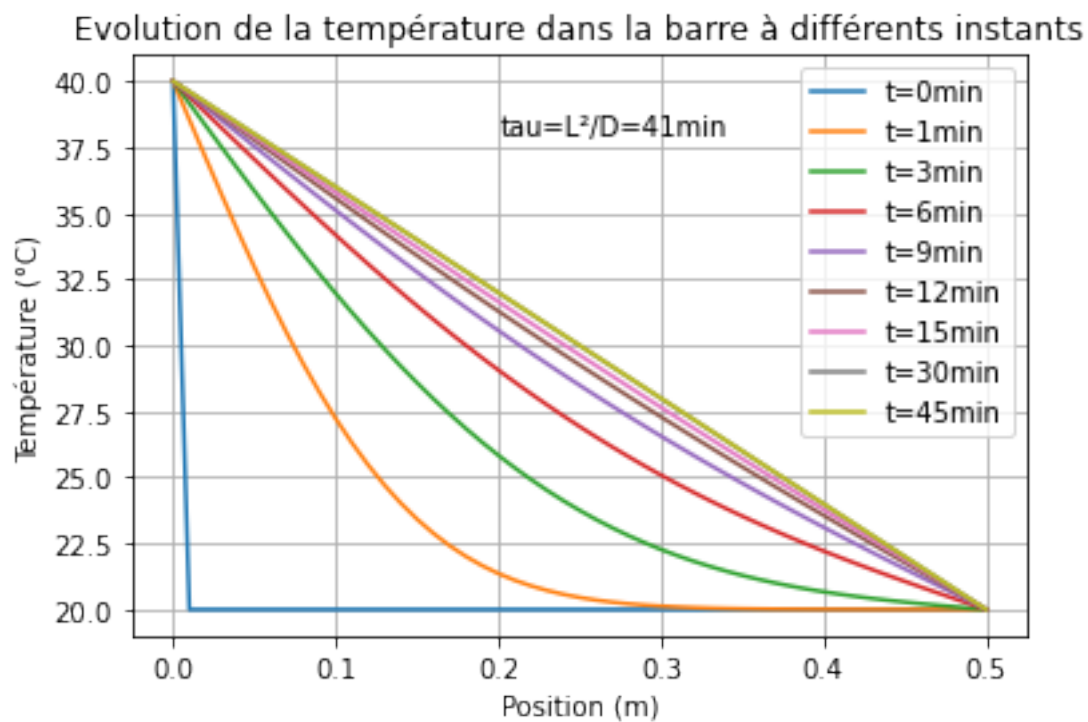
Pour quelques instants bien choisis (en min) on trace le graphe de $T(x)$:

```
1 instants_min = [0, 1, 3, 6, 9, 12, 15, 30, 45]
2
3 close()
4 figure()
```

```

5 for k in range(len(instants_min)):
6     i=int(instants_min[k]*60/dt)
7     plot(x,T[i,:],label="t="+str(instants_min[k])+"min")
8 xlabel("Position (m)")
9 ylabel("Température (degré C)")
10 title("Evolution de la température dans la barre à différents instants")
11 legend()
12 grid()
13
14 tau_min=L*L/D*1/60
15
16 text(0.201,38,"tau=L²/D="+str(tau_min)[0:2]+"min")
17
18 show()

```



En régime permanent $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ soit $\frac{dT}{dx^2} = 0$. On obtient un profil de température linéaire $T(x) = -\frac{(T_g - T_d)}{L} x + T_g$

On constate que le régime permanent est atteint à $t = 45 \text{ min} > \tau$ où $\tau = \frac{L^2}{D} = 41 \text{ min}$ représente le temps caractéristique du phénomène de diffusion thermique.