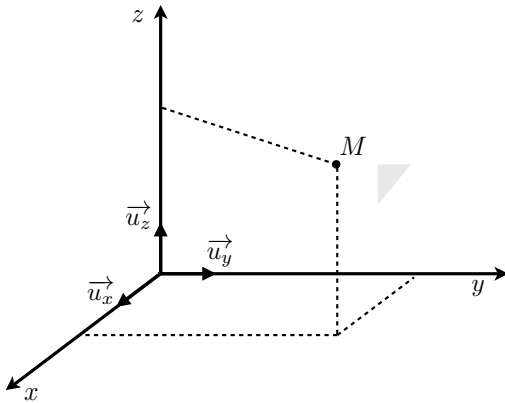


Formulaire

1 Systèmes de coordonnées

1.1 Les cartésiennes

Les coordonnées **cartésiennes** du point M sont (x, y, z) . Elles sont exprimées dans un repère ortho-normé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. La base vectorielle $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est **fixe**.



- Vecteur **position** :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

- l'abscisse x
- l'ordonnée y
- la cote z

- **Déplacement élémentaire** obtenu en sommant 3 déplacements particuliers :

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{\ell} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

- **Volume élémentaire** obtenu en effectuant côté $\times$ côté $\times$ côté :

$$d^3\tau = dx \, dy \, dz$$

- Volume d'un **parallélépipède** de longueur L , de largeur ℓ et de hauteur h obtenu en sommant ($\int$) les volumes élémentaires :

$$V = \iiint d^3\tau = \int_0^L dx \int_0^\ell dy \int_0^h dz = [x]_0^L [y]_0^\ell [z]_0^h$$

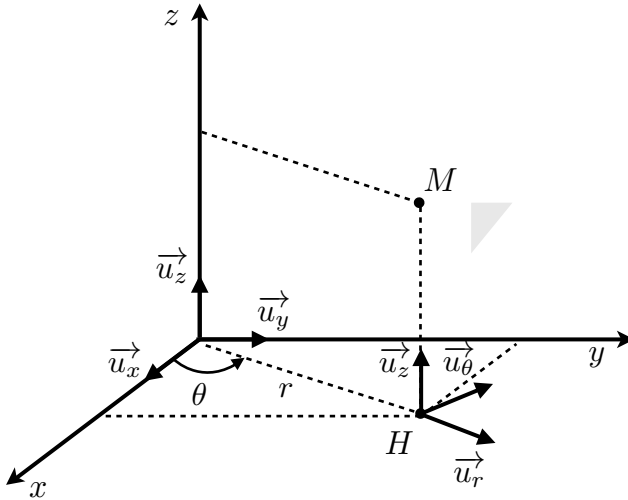
$$V = L \ell h$$

En effet, si les 3 variables x , y et z sont indépendantes alors l'intégrale triple est égale au produit des intégrales simples.

1.2 Les cylindriques

Animation.

Les coordonnées **cylindriques** du point M sont (r, θ, z) et la base vectorielle associée est $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ telle que la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est tournante.



- à utiliser si symétrie cylindrique i.e **symétrie de révolution autour d'un axe fixe** (Oz) : **invariance par rotation d'angle θ et par translation le long de (Oz) .**
- Vecteur **position** :

Soit H le projeté orthogonal de M dans le plan horizontal (xOy) : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$

- **Déplacement élémentaire** obtenu en sommant 3 déplacements particuliers :
 - **radial** dr i.e selon $\vec{u}_r$.
 - **orthoradial** $r d\theta$ i.e selon $\vec{u}_\theta$: longueur du petit arc de cercle de rayon r et d'angle $d\theta$.
 - **axial** dz i.e selon $\vec{u}_z$.

$$d\vec{\ell} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

- **Volume élémentaire** s'exprime ' par côté $\times$ côté $\times$ côté :

$$d^3\tau = dr r d\theta dz$$

- Volume d'un **cylindre** de rayon R et de hauteur h obtenu en **sommant** ($\int$) les volumes élémentaires :

$$V_{cyl} = \iiint d^3\tau$$

les 3 variables (r, θ, z) sont indépendantes donc : $V = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz$

$$V_{cyl} = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^h = \frac{R^2}{2} 2\pi h$$

$$V_{cyl} = \pi R^2 h$$

- le point M balaye un rayon.
- puis le rayon fait un tour complet pour balayer un disque de surface πR^2 .
- finalement, ce disque balaye la hauteur h pour que le volume total V du cylindre soit balayé.
- On vérifie l'**homogénéité** :

$$\dim(V_{\text{cyl}}) = L^3$$

- **Surface latérale d'un cylindre** de rayon R et de hauteur h :

La surface élémentaire d^2S s'exprime par côté $\times$ côté :

$$d^2S = R d\theta dz$$

La surface latérale totale résulte de la somme ($\int$) des surfaces élémentaires :

$$S_{\text{lat}} = \iint d^2S = R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = R[\theta]_0^{2\pi}[z]_0^h$$

$$S_{\text{lat}} = 2\pi R h$$

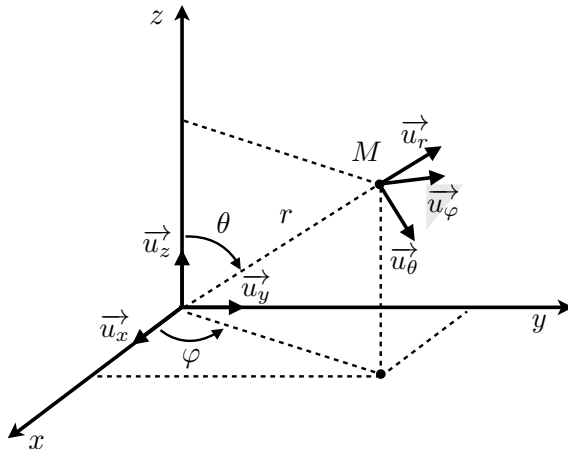
- Le rayon fait un tour complet pour que le point M décrive un cercle de périmètre $2\pi R$.
- ce cercle balaye la hauteur h pour finalement balayer la totalité de la surface latérale.
- On vérifie l'**homogénéité** :

$$\dim(S_{\text{lat}}) = L^2$$

1.3 Les sphériques

[Animation.](#)

Les coordonnées **sphériques** du point M sont (r, θ, φ) et la base vectorielle associée est $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Cette base est **mobile** :



- à utiliser si **symétrie sphérique** c'est-à-dire si **invariance par rotation d'angle θ et φ** autour du centre O .
- Vecteur **position** :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$$

- **Déplacement élémentaire** obtenu en sommant 3 déplacements particuliers le long du :

- rayon de la sphère de rayon r : $dr\vec{u}_r$.
- **méridien** de rayon r situé à la longitude φ : longueur du petit arc de cercle de rayon r et d'angle $d\theta$: $rd\theta\vec{u}_\theta$.
- **parallèle** de rayon $r\sin\theta$ situé à la **colatitute** $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$ où λ désigne la **latitude** : longueur du petit arc de cercle de rayon $r\sin\theta$ et d'angle $d\varphi$: $r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$.

$$d\vec{\ell} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

- **Volume élémentaire** obtenu en l'approximant à côté $\times$ côté $\times$ côté :

$$d^3\tau = dr r d\theta r \sin\theta d\varphi$$

- Volume d'une **sphère** de rayon R :

$$V_{sphere} = \iiint d^3\tau$$

les 3 variables (r, θ, φ) sont indépendantes donc : $V_{sphere} = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$V_{sphere} = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [-\cos\theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3} \times 2 \times 2\pi$$

$$V_{sphere} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

- le point M balaye un rayon.
- puis l'extrémité du rayon balaye un **méridien** du **pôle Nord** ($\theta = 0$) au **pôle Sud** ($\theta = \pi$). Ainsi un demi-disque est balayé.
- puis ce demi-disque fait un tour complet (la **longitude** φ varie de 0 à 2π) en balayant l'**équateur**.
- On vérifie l'**homogénéité** :

$$\dim(V_{sphere}) = L^3$$

- Surface d'une **sphère** de rayon R et de hauteur h :

La surface élémentaire d^2S s'approxime à côté $\times$ côté sur la sphère :

$$d^2S = R d\theta R \sin\theta d\varphi$$

La surface totale de la sphère s'obtient en sommant ($\int$) les surfaces élémentaires :

$$S_{sphere} = \iint d^2S$$

$$S_{sphere} = R^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2 [-\cos\theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = R^2 \times 2 \times 2\pi$$

$$S_{sphere} = 4\pi R^2$$

- L'extrémité d'un rayon balaye un **méridien du pôle Nord** ($\theta = 0$) **au pôle Sud** ($\theta = \pi$).
- Puis ce demi-cercle fait un tour complet pour balayer toute la surface de la sphère.
- On vérifie l'**homogénéité** :

$$\dim(S_{\text{sphere}}) = L^2$$

Volume $d\tau$ d'une **couronne sphérique** de centre O de rayon r et d'épaisseur dr . C'est le volume élémentaire situé entre les sphères (O, r) et $(O, r + dr)$.

$$d\tau = \frac{4}{3}\pi(r + dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \left[\left(1 + \frac{dr}{r}\right)^3 - 1 \right]$$

dl ordre 1 en $\frac{dr}{r}$ $d\tau = \frac{4}{3}\pi r^3 \left[\left(1 + 3\frac{dr}{r}\right) - 1 \right]$

$$\boxed{d\tau = 4\pi r^2 dr}$$

2 Opérateurs

2.1 Gradient

L'opérateur vectoriel $\overrightarrow{\text{grad}}$ s'applique toujours à un champ scalaire $f(M)$ tel que la température $T(M)$, la pression $P(M)$, le potentiel électrique $V(M)$ ou l'indice optique $n(M)$.

Il sert à rendre compte des **variations spatiales** du champ $f(M)$: la direction de $\overrightarrow{\text{grad}}f$ indique le sens de l'augmentation de f et la norme du gradient traduit l'intensité de la variation de f .

2.1.1 En cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$$

où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur **nabla** qui s'utilise seulement en cartésiennes.

Considérons un champ scalaire $f = f(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

La différentielle est définie par :

$$\begin{aligned} df &= f(\overrightarrow{OM} + d\overrightarrow{OM}) - f(\overrightarrow{OM}) \\ d\mathbf{f} &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ d\mathbf{f} &= \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{\ell} = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Par définition une surface iso- f est l'ensemble des point $M(x, y, z)$ où f a même valeur. Un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ sur la surface iso- f est tel que :

$$\begin{aligned} df &= 0 \\ \text{soit } \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{OM} &= 0 \\ \text{d'où } \overrightarrow{\text{grad}} f &\perp d\overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

On retient qu'une surface iso- f (ex : isotherme, isobare, équipotentielle) est toujours orthogonale à $\overrightarrow{\text{grad}} f$.

2.1.2 En cylindriques

$$\begin{aligned} f &= f(r, \theta, z) \\ \text{la différentielle est } d\mathbf{f} &= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ d\mathbf{f} &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{dr} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} r d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ \text{or } d\vec{\ell} &= dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z \\ \text{on reconnaît } d\mathbf{f} &= \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{\ell} \end{aligned}$$

avec $\overrightarrow{\text{grad}}$ en cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

On vérifie que chaque composante de $\overrightarrow{\text{grad}}$ a bien comme dimension L^{-1} .

2.1.3 En sphériques

$$\begin{aligned} f &= f(r, \theta, \varphi) \\ \text{la différentielle est } df &= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \\ df &= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} r d\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} r \sin \theta d\varphi \\ \text{or } d\vec{\ell} &= dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi \\ \text{on reconnaît } df &= \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{\ell} \end{aligned}$$

avec $\overrightarrow{\text{grad}}$ en sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

On vérifie que chaque composante de $\overrightarrow{\text{grad}}$ a bien comme dimension L^{-1} .

2.2 Divergence

L'opérateur divergence s'applique toujours à un champ vectoriel $\vec{A}$. La divergence d'un vecteur est un scalaire.

2.2.1 En cartésiennes

Par définition en cartésiennes (seulement) :

$$\text{div} = \vec{\nabla} \cdot$$

$$\begin{aligned} \text{Soit un champ vectoriel } \vec{A} &= A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z \\ \text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

2.2.2 En cylindriques

On ne peut pas utiliser l'opérateur nabla pour retrouver la formule de $\text{div } \vec{A}$. On admet la formule qui sera donnée car hors programme :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(A_z)}{\partial z}$$

2.2.3 En sphériques

On ne peut pas utiliser l'opérateur nabla pour retrouver la formule de $\text{div} \vec{A}$. On admet la formule qui sera donnée car hors programme :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

2.3 Laplacien

L'opérateur divergence peut s'appliquer à un scalaire ou à un vecteur.

2.3.1 En cartésiennes

Par définition en cartésiennes (seulement) :

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z$$

En général $A_x = A_x(x, y, z)$, $A_y = A_y(x, y, z)$ et $A_z = A_z(x, y, z)$ d'où :

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{aligned}$$