Diffusion thermique : exercices.

PSI

November 7, 2024

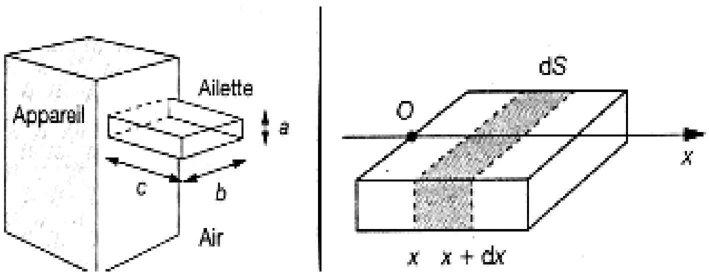
1 Ailette de refroidissement

Pour éviter un trop important échauffement de certains appareils, on place à leur contact des ailette de refroidissement. Leur forme est parallélépipédique aplatie, d'épaisseur $a = 2,0\,\mathrm{mm}$, de largeur $b = 10\,\mathrm{cm}$ et de longueur $c = 20\,\mathrm{cm}$.

En fonctionnement, l'appareil M est maintenu à la température $T_M = 60°\,\mathrm{C}$. L'air extérieur, qui circule, est de température constante et uniforme $T_A = 20°\,\mathrm{C}$.

Dans l'ailette, on admettra que le transfert thermique, de type conductif, peut être considéré comme unidimensionnel dans la direction (Ox) et qu'il obéit à la loi de Fourier avec $\lambda = 16\,.\mathrm{m}^{-1}.\mathrm{K}^{-1}$ la conductivité thermique.

Il existe aussi un transfert thermique de l'ailette vers l'air ambiant, de nature conducto-convective. Le flux thermique entre la surface latérale dS de l'élément d'abscisse x et l'air est de la forme $dP = h(T(x) - T_A)dS$ où $h = 150\,\mathrm{SI}$ est une constante.



1. Expliquer la loi de Fourier et donner l'unité SI de h.

2. Ecrire un bilan énergétique pour la tranche d'ailette contenue entre x et $x + dx$ en régime stationnaire. On posera $L = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$ et on donnera la valeur numérique de L. En déduire que la température $T(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{L^2}(T(x) - T_A) = 0 \tag{1}$$

3. Résoudre cette équation. En remarquant que $c >> L$, considérer c quasi infini pour simplifier l'expression obtenue.

4. Donner l'expression de la puissance dP sortant de la surface latérale dS de la tranche d'ailette comprise entre x et $x + dx$.

5. En déduire la puissance totale P évacuée par l'ailette, ainsi que sa valeur numérique.

6. Exprimer et calculer la puissance thermique P' transmise de l'appareil M à l'ailette en $x = 0$. Conclure.

7. Combien faudrait-il d'ailettes pour évacuer un flux thermique total de 900 W ?

8. La taille de chaque ailette peut-elle être réduite sans changer notablement l'ensemble des résultats précédents ? Si oui, expliquer pourquoi et comment ?

2 Formation de la buée

Une vitre d'automobile plane d'épaisseur $e = 5\,\mathrm{mm}$ et de conductivité thermique $\lambda = 1\,\mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$ sépare l'intérieur de l'automobile rempli d'air saturé en vapeur d'eau à la température $T_i = 20°\,\mathrm{C}$ et l'atmosphère extérieure qui impose une température $T_e = 10°\,\mathrm{C}$ à la surface de la vitre. On donne la masse volumique $\mu = 10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$ de l'eau, son enthalpie de vaporisation massique $l_v = 2,6.10^3\,\mathrm{kJ.kg^{-1}}$ et la capacité thermique massique du verre $c = 720\,\mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}$. Expliquer la formation de la buée et évaluer sommairement le taux de croissance $\frac{d\varepsilon}{dt}$ de l'épaisseur de la couche qu'elle forme.

3 Réfrigération par évaporation

Une grande jarre, assimilée à une sphère creuse de rayon $R = 50\,\mathrm{cm}$ et d'épaisseur $e = 2\,\mathrm{cm}$ contient de l'eau qui s'évapore lentement au Soleil à travers les pores de la jarre. La jarre est initialement pleine et le volume d'eau diminue de moitié en $\tau = 5$ jours. Calculer l'écart $T_i - T_e$ entre les températures à l'intérieur et à l'extérieur de la jarre. On donne la chaleur latente de vaporisation de l'eau $l_v = 2,6.10^6\,\mathrm{J.kg^{-1}}$ de l'eau, sa masse volumique $\mu = 1,0.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$, ainsi que la conductivité thermique $\lambda = 1\,\mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$ de la jarre.

4 Evaporation de l'eau dans une casserole

On étudie l'évaporation de l'eau (hauteur initiale 10 cm) dans une casserole en inox de rayon 10 cm de section S, de fond d'épaisseur $e = 5\,\mathrm{mm}$ et de conductivité thermique $\lambda = 14\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$. On chauffe le fond uniformément avec une puissance $P_0 = 3\,\mathrm{kW}$. L'ébullition a lieu à la température $T_v = 100°\,\mathrm{C}$.

1. En régime stationnaire, en supposant les pertes latérales négligeables, déterminer la température du dessous de la casserole.

2. Le transfert thermique entre l'eau et l'air s'effectue par conducto-convection avec une puissance $P_c = \alpha\, S\,(T_v - T_a)$ où $T_a = 20°\,\mathrm{C}$ (air ambiant) et $\alpha = 20\,\mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$. Etablir la variation de hauteur d'eau par unité de temps dans la casserole. L'enthalpie massique de vaporisation de l'eau est $L_v = 2,26.10^3\,\mathrm{kJ.kg^{-1}}$. En déduire la durée nécessaire pour vider totalement la casserole.

5 Durée d'un régime transitoire

Une tige cylindrique de longueur L (à conduction axiale et calorifugée sur la paroi latérale) est initialement à la température uniforme T_2 (celle de l'air environnant) et à $t = 0$, on lui applique une température T_1 en $x = 0$ (extrémité encastrée dans un four) alors qu'elle demeure à T_2 en $x = L$. Il s'instaure alors un régime transitoire.

Estimer la durée τ d'établissement du régime permanent pour une tige d'acier pour laquelle $L = 25\,\mathrm{cm}$, puis $L' = 50\,\mathrm{cm}$; $\lambda = 82\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$; $c = 0,46\,\mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}$; $\rho = 7,8.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$. Conclusion.

6 Chauffage d'une pièce avec pertes thermiques

On considère une pièce d'habitation et on nomme "parois" l'ensemble des murs (avec porte(s) et fenêtre(s)), sol et plafond qui la délimite. La température extérieure T_0 est constante, et on admet que l'ensemble air intérieur + parois de capacité thermique C, est à chaque instant à une température uniforme T.

La puissance thermique reçue par l'extérieur l'extérieur (à travers les parois) est donnée par la relation :

$$P_{th} = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{T - T_0}{R} \tag{2}$$

où R est la résistance thermique des parois.

La pièce est chauffée par un radiateur de puissance P mis en route à l'instant $t = 0$ instant auquel la température intérieure T initiale vaut T_0.

1. Etablir, en précisant le système considéré, une relation liant T, T_0, R, P, C et dt.

2. En déduire l'expression de T en fonction du temps en introduisant un temps caractéristique τ. Calculer la valeur T_M atteinte par T si le radiateur fonctionne pendant un temps très long.

A.N :
Calculer τ et T_M sachant que $T_0 = 5°$ C, $P = 2\,\mathrm{kW}$, $C = 2,4.10^5 J.K^{-1}$ et $R = 1.10^{-2}\,\mathrm{K.W^{-1}}$.

7 Ventilation d'un composant électronique

Un composant électronique de conductivité thermique $\lambda = 4,0\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ a deux faces F_1 et F_2 de même surface S et séparées par une épaisseur $d = 2\,\mathrm{cm}$.

Un ventilateur refroidit la surface F_1 grâce à un courant d'air à la température $T_a = 20°C$ tandis que l'autre face F_2 est maintenue, du fait de son utilisation, à la température $T_2 = 50°$ C.

En régime permanent la température de F_1 ne doit pas dépasser $T_1 = 30°C$.

Le transfert thermique entre le composant et l'air est donné par la loi de Newton :

$$\Phi_{th} = h(T_1 - T_a)S \tag{3}$$

1. Commenter cette loi et donner l'unité du coefficient h.

2. Quelle doit être la valeur du coefficient h pour ne pas dépasser la valeur indiquée de T_1 ?
   Sur quel paramètre peut-on jouer simplement pour obtenir cette valeur ?

8 Application élémentaire à l'isolation thermique

L'intérieur (T_i) et l'extérieur (T_f) d'une maison sont séparés par un mur d'épaisseur $l = 30\,\mathrm{cm}$ et de conductivité $\lambda = 0,7\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$.

Ce mur est recouvert d'un revêtement thermique d'épaisseur $e = 2\,\mathrm{cm}$ et de conductivité thermique $\lambda' = 0,03\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$.

Quel est le rapport $\frac{P'}{P}$ de la puissance perdue avec et sans revêtement ? Conclusion.

9 Température cutanée d'un mammifère

Un mammifère peut être sommairement schématisé par une sphère de muscles de centre O, de rayon R dont le métabolisme dégage la puissance thermique p par unité de volume, uniformément dans tout son volume.

L'air extérieur a une conductivité thermique λ, sa température loin de l'animal est $T_0 = 20°$ C.

On s'intéresse à la température de l'air (donc pour $r \geq R$) en régime permanent.

1. En passant par le flux thermique, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(r)$, pour $r \geq R$. En déduire l'expression de $T(r)$.

2. Quelle est la température cutanée T_c de l'animal en $r = R$? Commenter les variations de la différence $T_c - T_0$ en fonction de λ seulement (c'est-à-dire à R et p fixés), puis en fonction de p seulement, et enfin en fonction de R seulement.

3. Quelle doit être la valeur de p pour avoir $T_c = 30°$ C dans l'air puis dans l'eau ?

   On donne : $\lambda = 500\,\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ pour l'eau et $\lambda = 5\,\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ pour l'air (ces valeurs tiennent compte de la convection).

   Prendre $R = 25\,\text{cm}$ ce qui permet d'avoir un rapport surface/volume voisin de celui de l'être humain. Commentaire.

10 Survie dans un igloo

Evaluer l'épaisseur nécessaire pour que, dans un igloo cubique de côté $a = 1\,\text{m}$, un être humain puisse maintenir par la puissance $\mathcal{P} = 50\,\text{W}$ qu'il dégage une température intérieure $T_i = +10°$ C alors que la température extérieure vaut $T_e = -10°C$. On donne la conductivité de la glace recouverte de neige $\lambda \approx 0,005 W.K^{-1}.m^{-1}$.

11 L'art de travailler le verre

Un artisan verrier chauffe le milieu d'un tube en verre ($D_{th} \approx 10^{-6}\,\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) de longueur $2L = 20\,\text{cm}$ pour pouvoir y créér un coude. Evaluer la durée τ pendant laquelle il peut tenir à pleines mains les extrémités du tube.

12 Fusible

Un fusible est modélisé comme un cylindre, de section S et longueur $2L$, de conductivité thermique λ et électrique γ. Le cylindre, calorifugé latéralement, est au contact avec l'air ambiant de température T_0 à ses deux extrémités. Le fusible est parcouru par un courant I et le régime est supposé stationnaire.

1. Donner la forme de la température dans le cylindre. La commenter.

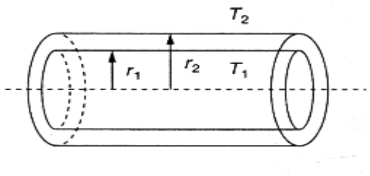
2. Quelle section choisir si on désire que le fusible fonde pour une intensité I_m ? La température de fusion est notée T_f.

Données :

$L = 1\,\text{cm}$, $\lambda = 60\,\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$, $\gamma = 1,0.10^6\,\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$, $T_0 = 290\,\text{K}$, $T_f = 400\,\text{K}$ et $I_m = 16\,\text{A}$.

13 Résistance thermique entre deux cylindres

L'espace entre deux cylindres coaxiaux de rayons r_1 et r_2, de longueur l quasi infinie, est occupé par un conducteur thermique de conductivité λ. Le cylindre intérieur est maintenu à la température T_1 et l'extérieur à T_2. Le régime est stationnaire.



1. De quelle(s) variable(s) dépend la température ?
2. Quelle est la forme de la densité de flux thermique $\vec{j}_Q$?
3. Soit $\phi(r)$ le flux thermique sortant au travers du cylindre de rayon r et de longueur l. Par un bilan, montrer que $\phi(r)$ est indépendant de r.
4. En déduire la résistance thermique de l'ensemble.

14 Moteur adiabatique ?

On modélise en général la compression et la détente de l'air dans un moteur à quatre temps par une évolution adiabatique. Pourtant les parois métalliques ($D_{th} \approx 10^{-4}\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$)) sont de bons conducteurs thermiques. A partir de quelle épaisseur e de paroi peut-on valider l'approximation adiabatique pour un moteur tournant à 6000 tours par minute ?

15 Combien de temps un plongeur peut-il rester sous l'eau ?

Un plongeur de masse $m = 75\,\mathrm{kg}$ est équipé de sa combinaison d'épaisseur $e = 3\,\mathrm{mm}$ et de conductivité thermique $\lambda = 4,4 \times 10^{-2}\,\mathrm{W.m}^{-1}.\mathrm{K}^{-1}$. Sa surface vaut $S = 1,3\,\mathrm{m}^2$. La résistance thermique de sa peau vaut $R_{peau} = 3,0 \times 10^{-2}\,\mathrm{K.W}^{-1}$. On note $T_e = 10°\,\mathrm{C}$ la température de l'eau environnante, uniforme et constante. La température intérieure initiale du plongeur est T_{i0}. Les pertes thermiques ont lieu au niveau de la peau et de la combinaison.

1. On modélise les pertes par convection par un flux thermique surfacique $\phi_c = h(T - T_e)$. Quelle est la résistance thermique R_c associée aux pertes par convection.
2. On modélise les pertes par rayonnement par un flux thermique surfacique $\phi_r = \sigma(T^4 - T_e^4)$ où $\sigma = 5,7 \times 10^{-8}\,\mathrm{W.m}^{-2}.\mathrm{K}^{-4}$ est la constante de Stefan. On suppose $|T - T_e| << T_e$. Montrer que l'on peut associer aux pertes par rayonnement une résistance thermique R_r dont on donnera l'expression en fonction de σ, T_e et de la surface S du système.
3. Quelle est alors la résistance thermique équivalente R_T associée à l'ensemble en fonction de R_{peau}, R_c, R_r et R_{combi} ?

4. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température intérieure $T_i(t)$ du plongeur sachant que la puissance thermique produite par le métabolisme humain est $q = 120\,\text{W}$ et sa capacité thermique massique $c = 4,5\,\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

5. Au bout de combien de temps t_f le plongeur est-il en hypothermie, c'est-à-dire que sa température corporelle est descendue à $35°$ C ?

16 Diffusion thermique à symétrie cylindrique

On étudie le transfert thermique dans un tube de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2, infiniment long, de conductivité thermique λ.

Les conditions thermiques sont telles que $T = T_1$ en $r = r_1$ et $T = T_2$ en $r = r_2$.

1. L'équation de la diffusion thermique à laquelle obéit le champ de température à l'intérieur du tube, est la suivante :

$$\frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} = 0 \tag{4}$$

   Préciser les hypothèses qui président à l'établisssement de cette équation. On donne le laplacien en coordonnées cylindriques dans le cas où $f(r)$:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2} \tag{5}$$

   Déterminer $T(r)$. En déduire l'expression du flux thermique ϕ à travers une surface cylindrique coaxiale de rayon r ($r_1 \leq r \leq r_2$) et de longueur L. Pourquoi ce flux thermique est-il constant ?

2. Donner l'expression de la résistance thermique R_{th} et préciser son unité. Donner une représentation schématique de cette relation, sous la forme d'un circuit électrique en précisant clairement.

3. Que devient l'équation de la diffusion thermique si une densité de puissance $p_{th}(\text{W.m}^{-3})$ est produite dans le matériau formant le tube ?

   La résoudre en utilisant les mêmes conditions aux limites que précédemment.

   Que devient la notion de résistance thermique ?

4. A l'interface entre un solide et un fluide, les échanges thermiques convectifs obéissent à la loi de Newton $\vec{j}_c = h_c(T_p - T_f)\vec{n}$, $\vec{j}_c$ est le vecteur densité surfacique de flux thermique échangé entre la paroi à la température T_p et le fluide dont la température loin de la paroi est T_f. $\vec{n}$ est la normale à la paroi orientée vers le fluide. h_c est le coefficient d'échange convectif ; il dépend de la nature du fluide, de sa température et du type d'écoulement.

   En appliquant l'analogie électrique, montrer que la résistance R_c équivalente à l'échange convectif entre une paroi cylindrique de rayon r_2, de longueur L, à la température T_p et un fluide de température constante et uniforme T_f, est égale à :

$$R_c = \frac{1}{h_c 2\pi r_2 L} \tag{6}$$

   Montrer que si le coefficient d'échange convectif tend vers l'infini, la température de la paroi tend vers T_f.

17 Effusivité et sensation de chaud

Lorsqu'on pose la main sur une table en bois et une table en acier, la table en bois paraît "plus chaude" alors que les deux tables sont à la même température. On se propose d'interpréter cet effet en adoptant le modèle suivant :

- la main est assimilée au demi-espace $x < 0$ et la table au demi-espace $x > 0$;
- les conditions initiales à l'instant $t = 0$ où la main vient en contact de la table sont $T(x < 0, t = 0) = T_{01} = 37°$ C et $T(x > 0, t = 0) = T_{02} = 17°$ C.

On se donne les conductivités thermiques λ_1 et λ_2 et les diffusivités thermiques D_1 et D_2. On cherche des solutions de l'équation de la chaleur dans chaque milieu de la forme :

$$T(x < 0, t) = \alpha_1 + \beta_1 \int_0^{u_1} \exp\big(-v^2\big) dv \tag{7}$$

$$\text{avec : } u_1 = \frac{x}{2\sqrt{D_1 t}} \tag{8}$$

$$T(x > 0, t) = \alpha_2 + \beta_2 \int_0^{u_2} \exp\big(-v^2\big) dv \tag{9}$$

$$\text{avec : } u_2 = \frac{x}{2\sqrt{D_2 t}} \tag{10}$$

$$\text{On rappelle que : } \frac{\partial}{\partial x}\Big(\int_0^{u(x,t)} g(v) dv\Big) = g(u(x,t))\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)_t \tag{11}$$

1. En dehors de l'instant $t = 0$, on s'impose la continuité de la température en $x = 0$. De quelle autre condition aux limites dispose-t-on en $x = 0$?

2. Déterminer α_1, β_1, α_2 et β_2. On posera $I = \int_0^\infty \exp(-v^2) dv$.

3. En déduire que la température de l'interface se met sous la forme :

$$T_i = \frac{E_1 T_{01} + E_2 T_{02}}{E_1 + E_2} \tag{12}$$

   où l'effusivité E est une caractéristique du matériau qu'on exprimera en fonction de D et λ. Sachant que $E_{main} = 10^3$, $E_{acier} = 10^4$ et $E_{bois} = 10$ en unités SI, calculer T_i pour un contact main-acier et un contact main-bois et conclure.

4. En réalité la température du corps humain est imposée par la circulation sanguine, ce qui revient à donner à la main une épaisseur $e \approx 1\,\text{mm}$ finie.

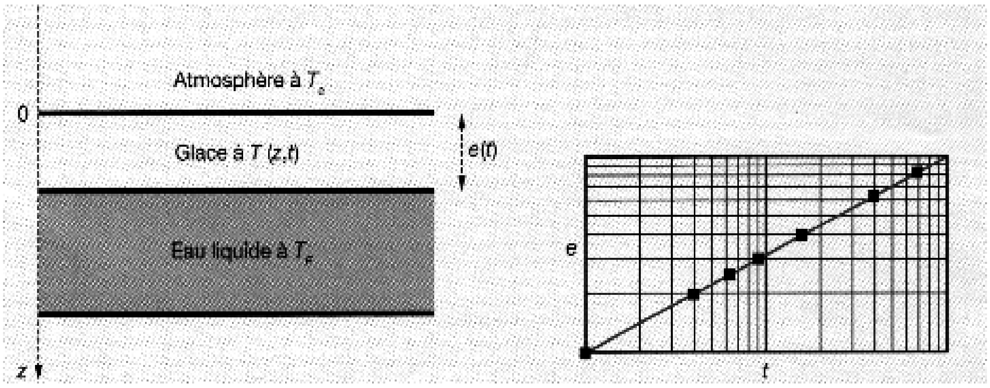
   Montrer que le modèle n'est valable que pour un temps de contact τ suffisamment bref et donner un ordre de grandeur de la valeur maximale acceptable sachant que $D_1 = 10^{-6}\,\text{m}^2.\text{s}^{-1}$.

5. Pour un contact long entre la main et la table, on adopte un modèle où le champ de température est stationnaire. On suppose aussi que la table a une épaisseur e_2 finie. Déterminer la température T_i de l'interface en fonction de λ_1, λ_2, e_1, e_2, T_{01} et T_{02}. Commenter.

18 Gel d'un lac

Lorsque l'air au-dessus d'un lac de surface S est à température $T_a < T_F$, on constate que l'épaisseur $e(t)$ de la couche de glace croît lentement avec le temps et une étude expérimentale donne le graphe de e en fonction du temps en échelles log-log.

On note T_F la température de l'eau liquide, supposée uniforme, et $T(z,t)$ la température de la glace pour $e(t) \geq 0$. On suppose que le profil de température $T(z,t)$ est le même que si le régime était stationnaire (approximation des régimes quasi stationnaires). On donne la température de fusion $T_F = 273\,\text{K}$ et la chaleur latente de fusion $l_F = 330\,\text{kJ.kg}^{-1}$ de la glace, ainsi que la masse volumique μ, sa capacité thermique massique $c = 4,18\,\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et sa conductivité thermique λ. On adoptera la même valeur μ pour la masse volumique de l'eau liquide.



1. On suppose que l'air impose sa température T_a à la surface du lac c'est-à-dire que $T(z = 0, t) = T_a$ (hypothèse (H)).

   (a) Exprimer le flux thermique ϕ traversant la couche de glace dans le sens des z décroissants en fonction de λ, $e(t)$, S, T_a et T_F.

   (b) En faisant un bilan pour la couche de glace qui gèle entre les instants t et $t + dt$, montrer que $e(t)$ est solution de :

   $$e\frac{de}{dt} = \lambda\frac{(T_F - T_a)}{\mu l_F} \tag{13}$$

   et déterminer $e(t)$ pour $e(t = 0) = e_0$. Le modèle rend-il compte du graphe donné ?

   (c) En déduire une durée caractéristique τ des variations de $e(t)$. Discuter la validité de l'ARQS.

2. En réalité l'hypothèse (H) n'est pas satisfaisante en général et doit être remplacée par la loi phénoménologique de Newton qui donne l'expression du flux thermique $\phi_a = hS(T_s - T_a)$ à l'interface lac-air ; $T_s = T(z = 0, t)$ est la température de la surface du lac et h un coefficient constant, d'autant plus élevé qu'un vent fort souffle au-dessus du lac.

   (a) Déduire de la continuité du flux thermique en $z = 0$ l'expression de T_s en fonction de T_a, T_F, h et λ.

   (b) A quelle condition le modèle de la question 1 est-il valable ? On ne demande pas d'établir la nouvelle expression de $e(t)$ qui ne remet pas en cause le comportement asymptotique de $e(t)$.

19 Canalisation d'eau chaude

De l'eau liquide se déplace à vitesse v constante dans une canalisation cylindrique d'axe (Ox), de section circulaire de rayon R comprise entre $x = 0$ et $x = +\infty$. Le champ de température $T(x)$ dans l'eau est stationnaire. En $x = 0$ l'eau entre "chaude" à la température T_0. Par ailleurs la canalisation est plongée dans une atmosphère à température $T_e < T_0$.

1. On envisage le système fermé $(\mathcal{S})$ constitué à l'instant t de l'eau contenue dans le tuyau entre x et $x + \delta x$. Où se trouve $(\mathcal{S})$ à l'instant $t + dt$? En déduire que sa variation d'énergie interne vaut :

$$dU = \mu c v \pi R^2 \frac{dT}{dx} dt \delta x \tag{14}$$

   Quelle est la variation de son énergie cinétique ?

2. La chaleur reçue par l'eau à travers une tranche de canalisation comprise entre x et $x+\delta x$ s'écrit :

$$\delta Q = \frac{2\pi R\lambda(T_e - T(x))\delta x dt}{e} \tag{15}$$

   où λ est la conductivité thermique du métal. Par ailleurs, on néglige la diffusion thermique dans l'eau. Montrer que $T(x)$ est solution de l'équation différentielle de la forme :

$$\delta \frac{dT}{dx} + T = T_e \tag{16}$$

   et exprimer δ en fonction de μ, c, v, R, e et λ.

   Déterminer $T(x)$ et tracer l'allure de son graphe. Quelle doit être, à δ fixé, la longueur maximale de la canalisation si on veut que la température à la sortie soit supérieure à $T_s = 40°$ C sachant que $T_0 = 60°$ C et $T_e = 20°$ C.

3. Exprimer la puissance totale $\mathcal{P}$ évacuée par le tuyau en utilisant l'expression de $T(x)$. Retrouver le résultat en appliquant le premier principe au système fermé constitué à l'instant t de l'eau contenue dans la canalisation et de l'eau qui va entrer entre t et $t + dt$.

20 Entropie créée par diffusion thermique

Une barre cylindrique de conductivité λ de section σ et de longueur L est en contact à ses extrémités avec deux thermostats qui maintiennent respectivement les températures T_1 et T_2. Un régime stationnaire est établi.

1. Exprimer le flux thermique ϕ traversant la barre.

2. Exprimer la variation d'entropie dS de la barre entre t et $t + dt$, l'entropie δS_e échangée avec les thermostats et l'entropie créée δS_c dans la barre. Commenter.

3. Le dispositif modélise un échangeur thermique, partie d'une machine ditherme. Pour se rapprocher le plus possible du rendement de Carnot on souhaite minimiser les irréversibilités. Comment faut-il choisir $T_1 - T_2$? Comment évolue alors le flux thermique ? Conclure.

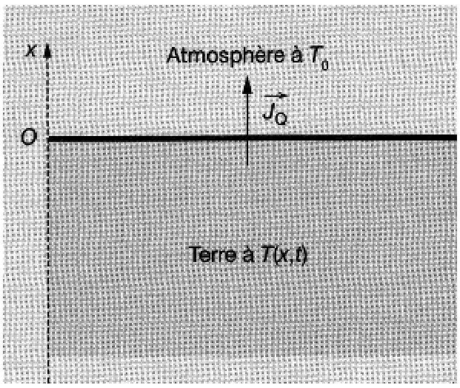
21 Température d'un astéroïde

Un astéroïde solide, sphérique de rayon R, est placé dans l'espace vide. L'astéroïde, de conductivité thermique λ, est radioactif de telle sorte qu'une énergie $\mathcal{P}d\tau dt$ est créée pendant dt dans un élément de volume $d\tau$, où $\mathcal{P}$ est une constante. On se place en régime stationnaire.

1. En faisant un bilan global pour l'astéroïde, exprimer sa température de surface T_s en fonction de $\mathcal{P}$, R et la constante de Stefan.
2. En faisant un bilan global pour la boule de rayon r inférieur à R, établir l'équation différentielle dont est solution $T(r)$ et en déduire la température T_0 au centre de l'astéroïde.

22 L'âge de la Terre "mesuré" par Lord Kelvin

Pour estimer l'âge de la Terre, Lord Kelvin a proposé le modèle suivant : la Terre est assimilée à un demi-espace $x < 0$ et l'atmosphère maintient $T(x = 0, t) = T_0 = 300\,\mathrm{K}$ à tout instant ; la Terre s'est formée par solidification de roches à la température $T_F = 2300\,\mathrm{K}$ de telle sorte qu'à l'instant initial on avait $T(x < 0, t = 0) = T_F$; depuis, la Terre se refroidit lentement en évacuant vers l'atmosphère un flux de chaleur qui vaut actuellement $j_Q(x = 0, t) = 0,08\,\mathrm{W.m^{-2}}$. On donne pour la Terre les chiffres moyens : $\mu = 2700\,\mathrm{kg.m^{-3}}$, $c = 1000\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$ et $\lambda = 2\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$.



1. On admet que la fonction :

$$f(x,t) = \int_0^u \exp\left(-v^2\right) dv \tag{17}$$
$$\text{avec : } u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \tag{18}$$

est solution de l'équation de la diffusion thermique. Justifier qu'alors $T(x,t) = a + bf(x,t)$ est aussi solution et déterminer a et b en fonction de T_F et T_0. On donne :

$$\int_0^\infty \exp\left(-v^2\right) dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{19}$$

2. En déduire l'expression de $j_Q(x = 0, t)$ puis une estimation de l'âge de la Terre. On pourra utiliser la propriété mathématique suivante de la fonction $f(x,t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{du}(\int_0^u \exp\left(-v^2\right)dv)(\frac{\partial u}{\partial x})_t = \exp\left(-u^2\right)(\frac{\partial u}{\partial x})_t = \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \tag{20}$$

3. On évalue désormais l'âge de la Terre à quatre milliards d'années. Quels éléments du modèle de Kelvin peut-on remettre en cause ?

23 Isolation thermique

Une boule solide de rayon a maintenue à la température constante T_i est recouverte d'une couche isolante concentrique d'épaisseur b et de conductivité λ, le tout plongé dans un fluide dont la température T_e loin de la boule est constante. On se place en régime stationnaire.

1. Exprimer le flux thermique à travers une sphère de rayon r dans l'isolant. En déduire que la résistance thermique de la couronne d'isolant comprise entre r et $r + dr$ vaut :

$$\delta R_{th} = \frac{dr}{4\pi\lambda r^2} \tag{21}$$

puis exprimer la résistance thermique totale de l'isolant en fonction de a, b et λ.

2. Le flux surfacique à l'interface isolant-fluide est de la forme $h(T_s - Te)$ où T_s est la température de l'interface. Exprimer la résistance thermique $R_{th,c}$ associée au contact isolant-fluide. En déduire que le flux thermique qui sort de la boule s'écrit :

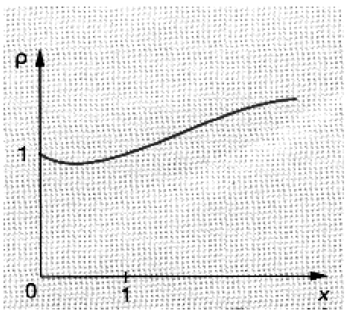
$$\phi = 4\pi a^2 h(T_i - Te)\rho(x) \tag{22}$$

$$\text{avec : } x = \frac{b}{a} \tag{23}$$

$$\rho(x) = \frac{(1+x^2)}{1+px(1+x)} \tag{24}$$

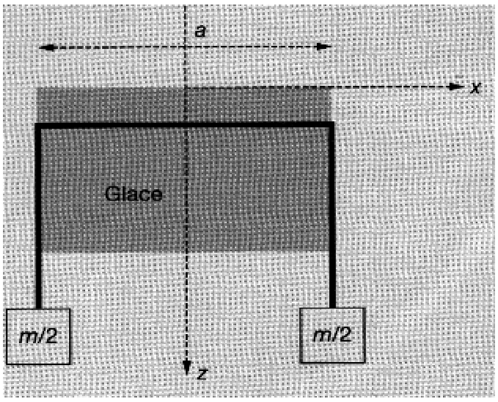
$$\text{et : } p = \frac{ah}{\lambda} \tag{25}$$

3. La figure ci-dessous donne le graphe de $\rho(x)$ pour $p = 0,5$. En quoi le rôle de l'épaisseur d'isolant est-il paradoxal ? Lever le paradoxe.



24 Expérience du regel

On pose un fil métallique de section rectangulaire de côtés $b = c = 1\,\text{mm}$ aux extémités duquel sont fixées deux masses $\frac{m}{2}$ sur un gros bloc de glace avec $m = 10\,\text{kg}$. On constate que la glace fond sous le fil, que le fil descend doucement à vitesse constante V et que l'eau regèle au-dessus du fil. On suppose qu'un équilibre solide-liquide s'établit au-dessus du fil avec les conditions $(p_s = 1\,\text{bar}, \mathrm{T_s} = 273,15\,\text{K})$ et en dessous du fil avec les conditions (p_i, T_i). Le champ de pesanteur est uniforme avec $g = 10\,\text{m.s}^{-2}$.



1. Etablir l'expression de $p_i - p_s$ en fonction de m, g, a et b et la calculer. En déduire la valeur de $T_s - T_i$ connaissant la pente $\alpha = \frac{dp}{dT} = -1,3.10^7\,\text{Pa.K}^{-1}$ de la courbe de fusion dans le diagramme d'état de l'eau.

2. On suppose le régime de diffusion thermique dans le fil métallique stationnaire. En déduire qu'il existe un flux thermique surfacique descendant φ dans le fil et l'exprimer en fonction de c, $T_s - T_i$ et de la conductivité $\lambda = 100\,\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ du métal. Calculer φ.

3. En appliquant le premier principe au système fermé constitué de la masse d'eau solide située sous le fil qui va fondre entre les instants t et $t + dt$ lors de la descente du fil d'une hauteur Vdt, établir l'expression de la vitesse V en fonction de φ, de la masse volumique $\mu = 10^3\,\text{kg.m}^{-3}$ de l'eau et de son enthalpie massique de fusion $l_F = 330\,\text{kJ.kg}^{-1}$. Calculer V.

4. L'expérience réussirait-elle avec un autre corps pur ?