

Evaporation de l'éther

1) L'éther liquide se vaporise à l'interface ($z = h(t)$) où l'équilibre liquide-vapeur à T_0 sous $P_{\text{sat}}(T_0)$ est réalisé.

Ainsi l'interface est riche en vapeur d'éther alors que le haut du tube est appauvri à cause du courant d'air qui brève.

On en déduit que la phase gaz du tube, située entre $z = h(t)$ et $z = H$, est le siège d'un phénomène de diffusion de vapeurs d'éther dans le support air (fixe).

le problème est donc unidimensionnel ; $n = n(z, t)$ où la densité particulière $n(z)$ représente le nombre de molécules d'éther (gaz) par unité de volume pour $h(t) < z < H$.

D'après l'équation de la diffusion :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \Delta n = 0$$

en l'absence de source dans la phase gaz.

On se place dans l'ARQS :

la vaporisation, et donc $h(t)$, ont un temps caractéristique τ très long (très lent) devant le temps caractéristique de diffusion τ_{diff} . Et donc $h(t)$ varie très lentement dans le temps. Du point de vue de la diffusion $h(t)$ est considéré constant.

les résultats du régime permanent sont applicables dans l'ARQS :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

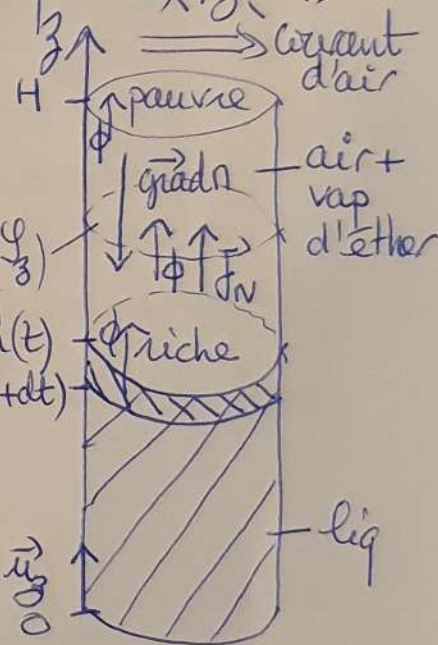
On doit donc résoudre l'équation de Laplace ; $\Delta n = 0$ avec $n = n(z)$
 $\frac{d^2 n}{dz^2} = 0$ d'où $n(z) = A(z - h) + B = Az + D$ (2 écritures au choix)

les conditions aux limites sont :

CL 1 : $n(z = h(t)) = \frac{P_{\text{sat}}}{k_B T}$ D'après la loi des gaz parfaits appliquée à la vapeur d'éther en $z = h(t)$ en équilibre à T_0 sous P_{sat} avec le liq éther ;

$$P_{\text{sat}} V = N_{\text{ether}} R T_0$$

$$\text{mole} \quad \text{or} \quad N_{\text{ether}} = n(z = h(t)) \frac{V}{v_a}$$



$$P_{\text{sat}} V = V_m(z=h(t)) \frac{R}{V_a} T_0$$

$$\frac{R}{V_a} = k_B : \text{constante de Boltzmann.}$$

$P_{\text{sat}}(T_0)$ est la pression partielle en éther (gaz) dans l'air en $z=h(t)$.

CL2 : $n(z=H)=0$ car le courant d'air évacue les vapeurs d'éther du haut du tube.

D'où : $\frac{P_{\text{sat}} V_a}{RT_0} = B$

et $0 = A(H-h) + B$ d'où $A = -\frac{B}{(H-h)}$

$$n(z) = B \left[1 - \left(\frac{z-h}{H-h} \right) \right]$$

Finalement : $n(z) = \frac{P_{\text{sat}} V_a}{RT_0} \left[1 - \left(\frac{z-h}{H-h} \right) \right] \checkmark$

2) Dans l'ARQS*, le flux particulaire ϕ se conserve : toute section S du tube de la phase gaz est traversée par le même flux ϕ . (* et en l'absence de source)

$$\phi = \iint_{(S_z)} j_N(z) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = S j_N(z) \text{ par définition du flux}$$

D'après la loi de Fick : $\vec{j}_N = -D \vec{\text{grad}} n$

$$j_N(z) \vec{u}_z = -D \frac{dn}{dz} \vec{u}_z$$

En projection sur $\vec{u}_z$: $j_N(z) = -D \frac{dn}{dz} > 0$ car $\frac{dn}{dz} < 0$: $n(z) \searrow$

$$\propto \frac{dn}{dz} = A$$

d'où $\phi = -DAS$

$$\phi = DS \frac{P_{\text{sat}} V_a}{RT_0 (H-h)} > 0$$

3) D'après un bilan de particules (molécules d'éther) sur la tranche de liquide située entre $h(t)$ et $h(t+dt)$ qui se vaporise entre t et $t+dt$:

$$(SN)_{liq} = (SN)_{vap}$$

où $(SN)_{liq}$ est le nombre de molécules d'éther dans le liquide (qui se vaporise)

$$(SN)_{liq} = \frac{(dm)_{liq}}{M} c_a \text{ avec } (dm)_{liq} = \mu (dV)_{liq}$$

et $(dV)_{liq}$: volume de la tranche.

$$(dV)_{liq} = S (h(t) - h(t+dt))$$

$$(dV)_{liq} = -S dh > 0 \text{ car } dh < 0 \text{ (} h(t) \searrow \text{)}$$

$$\text{d'où } (SN)_{liq} = - \frac{\mu S dh c_a}{M}$$

D'autre part : $(SN)_{vap} = \phi dt$ est le nombre de molécules d'éther issue de la vaporisation de la tranche

$$\text{le bilan s'écrit : } - \frac{\mu S c_a}{M} dh = \phi dt$$

$$\text{soit } \boxed{\frac{dh}{dt} = - \frac{M D P_{sat} c_a}{\mu S R T_0} \frac{1}{(H-h)}} \text{ est l'équation différentielle en } h(t).$$

Pour résoudre, on sépare les variables h et t puis on intègre entre $t=0$ et t quelconque :

$$\int_{h_0}^{h(t)} (h-H) dh = \frac{M D P_{sat}}{\mu R T_0} \int_0^t dt$$

$$\left[\frac{(h-H)^2}{2} \right]_{h_0}^{h(t)} = \frac{M D P_{sat}}{\mu R T_0} t$$

$$(h(t)-H)^2 = (h_0-H)^2 + 2 \frac{M D P_{sat}}{\mu R T_0} t$$

$$h(t)-H = \pm \sqrt{(h_0-H)^2 + 2 \frac{M D P_{sat}}{\mu R T_0} t}$$

$$\text{or } h(t)-H < 0$$

$$\text{d'où } \boxed{h(t) = H - \sqrt{(h_0-H)^2 + 2 \frac{M D P_{sat}}{\mu R T_0} t}}$$

4) La durée totale τ d'évaporation de l'éther est telle que: $h(t=\tau)=0$

$$\frac{2MDP_{\text{sat}}}{\mu RT_0} \tau = (0-H)^2 - (h_0-H)^2$$

$$\tau = \frac{\mu RT_0}{2MDP_{\text{sat}}} [H^2 - (h_0-H)^2]$$

$$\tau = \frac{\mu RT_0 H^2}{2MDP_{\text{sat}}} \left[1 - \left(\frac{h_0}{H} + 1 \right)^2 \right]$$

A.N: $\tau = \frac{626 \times 831 \times 293 \times (8 \times 10^{-2})^2}{2 \times 74,1 \times 10^{-3} \times 1,5 \times 10^{-5} \times 958 \times 10^5} \left[1 - \left(1 - \frac{5}{8} \right)^2 \right] \text{ s}$

$\uparrow$ T_0 en K $\uparrow$ P_{sat} en Pa
 Men $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

$$\tau = 13,0 \times 10^5 \text{ s} = \frac{13,0 \times 10^5}{36 \times 10^3} \text{ h} = \frac{13,0 \times 10^5}{36 \times 10^3 \times 24} \text{ jours}$$

$$\tau = 15 \text{ jours}$$

5) $\tau_{\text{diff}} = \frac{\delta^2}{D}$ avec $\delta \approx H - h_0$

$$\tau_{\text{diff}} \approx \frac{((8-5) \times 10^{-2})^2}{1,5 \times 10^{-5}} \text{ s} = \frac{3 \times 3 \times 10^{-4+5}}{\frac{3}{2}} \text{ s} \quad \text{soit } \tau_{\text{diff}} \approx 60 \text{ s} = 1 \text{ min}$$

On a bien $\tau \gg \tau_{\text{diff}}$ et donc l'ARQ est validée.