

Dialyse (Oral Centrale - Supélec)

✓

1) Le bilan de particules donne :

$$\text{div}(\vec{j}_n) + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

En régime stationnaire : $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$

Soit $\text{div}(\vec{j}_n) = 0$

$\vec{j}_n$ est à flux conservatif :

son flux ϕ à travers une section (y) droite S quelconque est indépendant de x .
Or, par définition :

$$\phi = \iint_{(y)} \vec{j}_n \cdot d\vec{S} \vec{e}_x \text{ avec } \vec{j}_n = j_n(x) \vec{e}_x$$

$$\phi = j_n(x) \iint_{(y)} dS = j_n(x) S. (1)$$

d'après la loi de Fick :

$$\vec{j}_n = -D \text{grad} n$$

$$\text{soit } j_n(x) = -D \frac{dn}{dx} \quad (2)$$

(1) et (2) donnent :

$$\phi = -SD \frac{dn}{dx}$$

$$\text{soit } \frac{dn}{dx} = -\frac{\phi}{SD} = \text{cte}/x \text{ soit } \Delta n = 0$$

intégration 1 fois / x :

$$n(x) = -\frac{\phi}{SD} x + n_1$$

car c12 :
 $n_1 = n(x=0)$

$$\text{et c11 : } n(x=e) = n_2 = -\frac{\phi e}{SD} + n_1$$

$$\text{d'où } \boxed{\phi = (n_1 - n_2) \frac{SD}{e}} \quad (3)$$

$$2) \phi = -\frac{dN_1}{dt} > 0 \quad (4)$$

car $\frac{dN_1}{dt} < 0$ puisque $N_1(t) \downarrow$

D'autre part, la conservation du nombre de molécules d'urée

entre $t=0$ et t quelconque s'écrit : (on néglige se devant v !)

$$N_1(0) + N_2(0) = N_1(t) + N_2(t)$$

$$\text{or } N_2(0) = 0 \text{ et } N_1(0) = n_0 V$$

$$\text{d'où } N_1(t) + N_2(t) = n_0 V = \text{cte} \quad (5)$$

Dérivons 1 fois / t :

$$(6) \frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} = 0 \text{ soit } \frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_1}{dt}$$

Identifions (3) et (4) :

$$\frac{dN_1}{dt} = (n_2 - n_1) \frac{SD}{e}$$

$$\text{or } n_2(t) = \frac{N_2(t)}{2V} \text{ et } n_1(t) = \frac{N_1(t)}{V}$$

$$\text{d'où : } \frac{dN_1}{dt} + \left(\frac{N_1(t)}{V} - \frac{N_2(t)}{2V} \right) \frac{SD}{e} = 0$$

$$\text{or } -N_2(t) = N_1(t) - n_0 V \text{ d'après (5)}$$

d'où :

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{3SD}{2eV} N_1(t) = \frac{n_0 V SD}{2e}$$

$$\text{Posons } \frac{1}{\tau} = \frac{3SD}{2eV}$$

$$\boxed{\frac{dN_1}{dt} + \frac{N_1}{\tau} = \frac{n_0 SD}{2e}} \quad (7)$$

Or (5) et (6) d'où :

$$-\frac{dN_2}{dt} + \frac{n_0 V}{\tau} - \frac{N_2}{\tau} = \frac{n_0 SD}{2e}$$

Si $\tau \gg t$ du phénomène de la diffusion
→ si on alors $N_1(t)$ et $N_2(t)$ sont des cste
d'où $\phi = \text{cte}$ pour la diffusion.

$$\frac{dN_2}{dt} + \frac{N_2}{\tau} = -\frac{n_0 SD}{2e} + \frac{n_0 V 3SD}{2eV}$$

$$\boxed{\frac{dN_2}{dt} + \frac{N_2}{\tau} = \frac{n_0 SD}{e}} \quad (8)$$

3) On résout l'équation différentielle (7) du 1er ordre;

$$N_1(t) = \underbrace{A e^{-t/\tau}}_{N_{1h}(t)} + \underbrace{\frac{n_0 SD}{2e} \tau}_{N_{1p}} \quad \text{avec } 0_+ \frac{N_{1p}}{\tau} = \frac{n_0 SD}{2e}$$

CI: $N_1(t=0) = n_0 V$

$\& N_1(t=0) = A + \frac{n_0 SD}{2e} \frac{2eV}{3SD} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{d'où } A = n_0 V - \frac{n_0 V}{3} \\ \text{bit } A = \frac{2}{3} n_0 V \end{array} \right.$

d'où (9) $\boxed{N_1(t) = \frac{2}{3} n_0 V e^{-t/\tau} + \frac{n_0 V}{3}} \quad \searrow$

On déduit $N_2(t) = n_0 V - N_1(t) \quad (5)$

$$\boxed{N_2(t) = \frac{2}{3} n_0 V (1 - e^{-t/\tau})} \quad \nearrow$$

Test tel que:

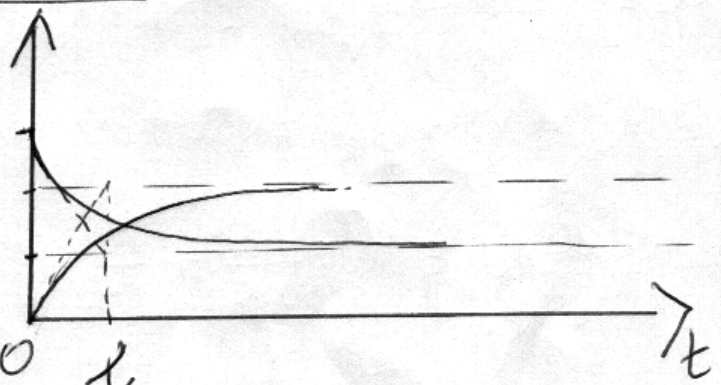
$$n_1(t=T) = \frac{n_0}{2}$$

$$N_1(t=T) = \frac{n_0 V}{2} \quad \text{car } n_1 = \frac{N_1}{V} \text{ : concentration}$$

$\& (9): \frac{2}{3} n_0 V e^{-t/\tau} + \frac{n_0 V}{3} = \frac{n_0 V}{2}$

$$e^{-t/\tau} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$e^{-t/\tau} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$$



$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4$$

d'où $\boxed{T = \tau \ln 4}$