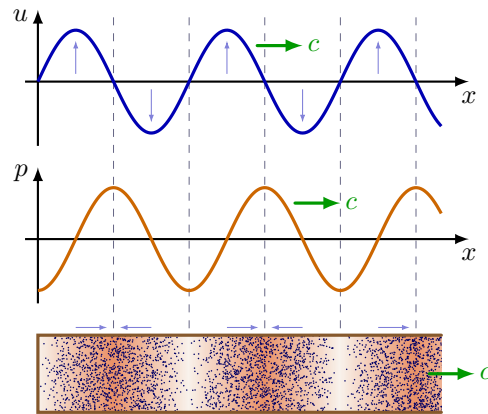


Les ondes acoustiques dans les fluides.

PSI.

March 24, 2026



1 Généralités

Les ondes sonores sont des **ondes mécaniques longitudinales** induites par une faible variation de la pression (alternance de suppression et de dépression) dans un milieu matériel. Elles ne peuvent donc pas se propager dans le vide contrairement aux OEM. La **hauteur** d'un son est la fréquence f_1 de son fondamental alors que son **timbre** est sa richesse en harmoniques $f_n = n f_1$.

Le son est produit par un émetteur constitué par un objet qui vibre : corde, peau de tambour, larynx, paroi mobile d'un haut-parleur etc... Une onde sonore se propage de proche en proche à la fréquence de vibration de l'objet. On étudiera particulièrement le **tuyau sonore** comme exemple de propagation **unidimensionnelle**.

Le son rest capté par un récepteur (tympan, microphone) sensible aux faibles variations de pression. Le capteur est constitué d'une surface mise en mouvement par la force de pression. Le déplacement de cette surface est ensuite converti en un signal électrique.

- Le **domaine audible** par l'Homme est $f \in [20 \text{ Hz}; 20 \text{ kHz}]$; un son est d'autant plus **grave/aigü** que sa fréquence est faible/élevée ;
- Les **infrasons** sont tels que $f < 20 \text{ Hz}$;
- Les **ultrasons** sont tels que $f > 20 \text{ kHz}$, audibles par les chiens, chats, chauves-souris, dauphins...

2 Description du fluide

Nous étudions ici la propagation d'ondes acoustiques dans un fluide. L'**écoulement est supposé parfait** et l'influence de la **pesanteur est négligée** de sorte que **seules les forces de pression** sont à considérer.

Quand le fluide est au repos, on notera le champ de :

- masse volumique μ_0 uniforme ;
- pression p_0 uniforme ;
- vitesse est nul.

3 Les équations fondamentales

3.1 L'approximation acoustique

L'onde acoustique perturbe l'état de repos où les effets de pesanteur sont négligeables. Les champs de vitesse, de masse volumique et de pression se développent autour de l'état d'équilibre :

$$\begin{aligned}\vec{v}(M, t) &= \vec{0} + \vec{v}_1(M, t) \\ p(M, t) &= p_0 + p_1(M, t) \\ \mu(M, t) &= \mu_0 + \mu_1(M, t) \\ \text{dans l'air : } p_0 &= 1 \text{ atm} = 1013 \text{ hPa}\end{aligned}$$

La surpression appelée aussi **pression acoustique** $p_1(M, t)$ est algébrique :

- Si $p_1 > 0$ alors il y a **surpression** sinon c'est une **dépression**.
- de l'ordre de $100 \text{ Pa} = 1 \text{ hPa}$ soit $10^{-3}p_0$ au seuil de douleur de l'oreille (130 dB) et de l'ordre de quelques 10 mPa pour une voix normale à 1 m.

Les moyennes temporelles des perturbations sont nulles :

$$\langle \vec{v}(M, t) \rangle = \vec{0} \quad , \quad \langle p_1(M, t) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \mu_1(M, t) \rangle = 0$$

L'approximation acoustique consiste à considérer que la perturbation engendrée par l'onde acoustique est faible par rapport à l'état de repos, de sorte que tous les champs $\vec{v}(M, t)$, $p_1(M, t)$ et $\mu_1(M, t)$ et leurs dérivées spatiales et temporelles sont des **infinitésimaux d'ordre 1**. Ainsi, la propagation de l'onde acoustique dans le fluide est régie par des **équations linéaires**. On considère donc que :

$$\begin{aligned}p_1(M, t) \ll p_0 \quad \mu_1(M, t) \ll \mu_0 \quad v(M, t) \ll c \\ \text{or le déplacement } u \text{ est tel que } v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{d'où } u \approx v_1 T \quad \text{d'où } u \ll \lambda \quad \text{car } cT = \lambda\end{aligned}$$

où c est la célérité des ondes sonores.

3.2 Linéarisation de l'équation d'Euler

L'équation d'Euler résulte de la 2^{de} loi de Newton appliquée à une particule de fluide de volume $d\tau$, de masse $\mu d\tau$. Le fluide est considéré en écoulement parfait :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} p$$

soit $(\mu_0 + \mu_1) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} p_0 - \overrightarrow{\text{grad}} p_1 = \vec{0} - \overrightarrow{\text{grad}} p_1$

Les termes $\mu_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et l'accélération convective $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}$ sont d'ordre 2 et donc négligés. Finalement, l'**équation d'Euler** se réduit à :

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p_1}$$

En appliquant $\overrightarrow{\text{rot}}$ on a $\mu_0 \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v})}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} p_1 = -\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} p_1 = \vec{0}$

L'onde acoustique provoque un **écoulement irrotationnel** $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ (le pdf de fluide ne subissent que des translations).

3.3 Linéarisation de l'équation locale de conservation de la masse

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

soit $\frac{\partial(\mu_0 + \mu_1)}{\partial t} + \text{div}((\mu_0 + \mu_1) \vec{v}) = 0$ or $\frac{\partial \mu_0}{\partial t} = 0$

et μ_0 uniforme $\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{v}) + \text{div}(\mu_1 \vec{v}) = 0$

Or $\mu_1 \text{div}(\vec{v})$ est d'ordre 2 donc négligeable.

Finalement, l'**équation de conservation de la masse** s'écrit $\boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{v}) = 0}$

3.4 Evolution thermodynamique

Un **écoulement parfait** est tel que **tous les phénomènes diffusifs, irréversibles, sont négligés**. L'écoulement est donc **adiabatique et réversible** et donc **isentropique**. Le coefficient de compressibilité isentropique χ_S (khi) est défini par :

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \quad \text{or pour un système fermé } m = cste \quad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dV}{V}$$

d'où $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_S \approx \frac{1}{(\mu_0 + \mu_1)} \left(\frac{\mu - \mu_0}{p - p_0} \right) \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_1}{p_1}$

Finalement, l'évolution thermodynamique conduit à $\boxed{\mu_1 = \chi_S \mu_0 p_1}$

4 L'équation de propagation des ondes sonores

4.1 Découplage

Les 3 équations locales utiles pour déterminer l'équation de propagation de la surpression $p_1(M, t)$ sont :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}} p_1 \quad \text{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\mu_1}{\mu_0} = \chi_S p_1$$

Éliminons le champ de masse car c'est le champ le moins utile puisqu'il n'intervient quasiment jamais dans les conditions aux limites.

$$\text{div}(\vec{v}) = -\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t}$$

Dérivons par rapport au temps pour découpler les équations.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\text{div}(\vec{v}))}{\partial t} &= -\chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \\ \text{théorème de Schwarz} \quad \text{div}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) &= -\chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \\ \text{or équation d'Euler d'où} \quad \text{div}\left(-\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}} p_1\right) &= -\chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \\ \text{soit} \quad -\frac{1}{\mu_0} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} p_1) &= -\chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \\ \text{or en cartésiennes} \quad \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta \\ \text{d'où} \quad \Delta p_1 &= \mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \end{aligned}$$

De même on établit l'équation de propagation de la vitesse.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta \vec{a}$$

Or l'écoulement est irrotationnel $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ d'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v})) - \Delta \vec{v} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\text{grad}}\left(-\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t}\right) - \Delta \vec{v} &= \vec{0} \\ \Delta \vec{v} &= \chi_S \frac{\partial}{\partial t} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} p_1\right) \\ \text{Euler} \quad \Delta \vec{v} &= \chi_S \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) \\ \Delta \vec{v} - \mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned}$$

4.2 Equation de propagation

♡ Les champs de supression $p_1(M, t)$ et de vitesse $\vec{v}(M, t)$ sont solution d'une équation de d'Alembert :

$$\Delta p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \vec{v} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Comparons le terme de pesanteur $\mu_1 \vec{g}$ au $\vec{\text{grad}} p_1$: $\frac{\|\vec{\text{grad}} p_1\|}{\mu_1 g} = \frac{\frac{p_1}{\lambda}}{\chi_S \mu_0 p_1 g} = \frac{c^2}{g \lambda}$. Le terme de pesanteur est négligeable si :

$$\frac{c^2}{g} \gg \lambda \quad \text{soit } f \gg \frac{g}{c} \quad \text{Pour l'air } f \gg 0,03 \text{ Hz}$$

4.3 La célérité du son

La célérité du son dans un fluide est $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \chi_S}}$. Elle est d'autant plus faible que :

- le fluide ou solide est dense i.e inerte ;
- le fluide est compressible, χ_S élevé, moins il est «raide »

♡ C'est la raideur du milieu et non pas sa densité (inertie) qui détermine c :

$$c_{\text{solide}} > c_{\text{liquide}} > c_{\text{gaz}}$$

$$c_{\text{acier}} \approx 4.10^3 \text{ m.s}^{-1} \quad c_{\text{eau}} \approx 1,5.10^3 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{et } c_{\text{air}} \approx 3,4.10^2 \text{ m.s}^{-1}$$

On peut assimiler un gaz peu dense à un gaz parfait. En écoulement isentropique, la loi de Laplace est validée :

$$pV^\gamma = cste$$

par définition de la masse volumique $V = \frac{m}{\mu}$

or une pdf est une système fermé $m = cste$

La loi de Laplace devient $p\mu^{-\gamma} = cste$

d'où $\ln p - \gamma \ln \mu = cste$

On différentie $\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\mu}{\mu} = 0$

or par définition $\chi_S = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dp} = \frac{1}{\gamma p} \approx \frac{1}{\gamma p_0}$

d'où $c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\mu_0}}$

or l'équation des gaz parfait donne $\mu_0 = \frac{p_0 M}{RT_0}$

♡ La célérité du son dans les **gaz parfaits en écoulement isentropique** est donnée par :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

Plus le gaz est froid, T faible, plus il est dense μ grande et plus c est faible. C'est donc la densité qui détermine l'évolution de c dans l'air en fonction de la température.

L'air est composé de 80% de N_2 ($M(N_2) = 2 \times 14 = 28 \text{ g.mol}^{-1}$) et de 20% de O_2 ($M(O_2) = 2 \times 16 = 32 \text{ g.mol}^{-1}$).

Application numérique :

$$T = 300 \text{ K}$$

$$\text{pour l'air } M = 0,80 \times 28 + 0,20 \times 32 = 29 \text{ g.mol}^{-1} = 29.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$$

$$\text{d'où } c = 347 \text{ m.s}^{-1}$$

Cette valeur numérique est en très bon accord avec les mesures expérimentales. Cependant, la célérité du son dans l'air dépend aussi du taux d'humidité de l'air.

Pour l'eau est 10^3 fois plus dense que l'air mais χ_S est 10^4 fois plus faible que pour l'air. En effet, l'eau est beaucoup moins compressible que l'air. Il en résulte que $c_{eau} \approx 10c_{air}$ soit de l'ordre de 1400 m.s^{-1} .

5 Ondes acoustiques planes progressives

5.1 OPPH

Une OPPH est de la forme :

$$p_1(M, t) = A_M \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)$$

$$\text{la notation complexe associée est } \underline{p}_1 = A_M \exp(j\omega t - j\vec{k} \cdot \vec{r} - j\varphi)$$

$$\text{de sorte que } p_1(M, t) = \text{Re}(\underline{p}_1(M, t))$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\text{le vecteur d'onde est } \vec{k} = k\vec{u} \quad \text{avec } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\underline{p}_1 = A_M \exp(j\omega t - jk_x x - jk_y y - jk_z z - j\varphi)$$

$$\text{d'où } \frac{\partial \underline{p}_1}{\partial x} = -jk_x \underline{p}_1 \quad \text{de même } \frac{\partial \underline{p}_1}{\partial y} = -jk_y \underline{p}_1 \quad \text{et } \frac{\partial \underline{p}_1}{\partial z} = -jk_z \underline{p}_1$$

$$\vec{\nabla} = -j\vec{k} \quad \text{et } \frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

5.2 Vitesse de phase

Soit l'OPPH qui se propage selon \vec{u}_x :

$$p_1(M, t) = A_M \cos(\omega t - kx - \varphi)$$

$$\text{soit } \psi(x, t) = \omega t - kx \quad \text{d'où } x = \frac{\omega}{k}t - \frac{\psi}{k}$$

Les lieux équiphasés définis par $\psi = cste$ se déplacent à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$

5.3 Structure des OPPH

5.3.1 Relation de dispersion

En complexe l'équation de propagation s'écrit :

$$\Delta \underline{p}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{p}_1}{\partial t^2} = 0 \quad \text{or } \Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \quad \text{et } \Delta = (-j\vec{k})^2 = -k^2$$

$$\text{d'où } -k^2 \underline{p}_1 - \frac{1}{c^2} (j\omega)^2 \underline{p}_1 = 0 \quad \text{soit } -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

On ne considère ici que le cas de l'onde progressive $k > 0$. Le cas $k < 0$ correspond à une onde régressive.

La **relation de dispersion** est $k = \frac{\omega}{c}$ ainsi le milieu est dit **non dispersif** puisque la vitesse de phase $v_\varphi = c$ est indépendant de ω .

Une onde réelle est un paquet d'OPPH. Dans un milieu non dispersif toutes les composantes spectrales (OPPH) se propagent à la même vitesse c et donc le paquet d'onde ne se déforme pas.

5.3.2 Impédance acoustique

En complexe, l'équation d'Euler s'écrit :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \underline{p}_1$$

$$\mu_0 j\omega \vec{v} = j\vec{k} \underline{p}_1$$

$$\text{d'où } \vec{v} = \frac{k \underline{p}_1}{\mu_0 \omega} \vec{u}$$

$$\text{en prenant les parties réelles } \vec{v} = \frac{k p_1}{\mu_0 \omega} \vec{u}$$

On constate que le champ des vitesses \vec{v} est parallèle à la direction de propagation \vec{u} des OPPH et que **les champs de vitesse et de surpression vibrent en phase**.

Les OPPH acoustiques dans un fluide sont **longitudinales**.

L'**impédance acoustique** Z_a est définie par $p_1 = Z_a \vec{v} \cdot \vec{u}$

$$\text{si propagation dans le sens } \vec{u} \text{ alors } p_1 = Z_a v \quad \text{avec } Z_a = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_S}}$$

$$\text{si propagation dans le sens } -\vec{u} \text{ alors } p_1 = -Z_a v$$

L'impédance acoustique est d'autant plus grande que le milieu est dense (μ_0 élevé) et moins compressible (χ_S faible) :

$$Z_{a,solide} > Z_{a,liquide} > Z_{a,gaz}$$

Remarque :

Il est inutile, ici, de définir l'impédance acoustique en complexe car v et p_1 sont en phase. Attention Z_a **ne s'exprime pas en Ohm** mais en $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$!

La définition de Z_a ne s'applique qu'à des ondes progressives et pas à des ondes stationnaires ! Les ondes doivent être progressives mais pas nécessairement harmoniques. En effet, d'après la théorie de Fourier chaque onde est une somme d'OPPH. La définition de Z_a fait le lien entre chaque composante spectrale de pression et de vitesse de même rang.

Autre façon de montrer que Z_a ne s'applique qu'à des OPP :

On considère une OPP de surpression ou de vitesse à une dimension (tuyau sonore) :

$$p_1(x, t) = F_u\left(t - \frac{x}{c}\right) = F_p(\theta(x, t)) \quad \text{et} \quad v(x, t) = F_v\left(t - \frac{x}{c}\right) = F_v(\theta(x, t))$$

avec $\theta(x, t) = t - \frac{x}{c}$ d'où $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 1$ et $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{c}$

D'après l'équation d'Euler linéarisée en projection sur la direction de propagation \vec{u}_x :

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{u}_x &= -\overrightarrow{\text{grad}} p_1 \cdot \vec{u}_x \\ \mu_0 \frac{\partial F_v}{\partial t} &= -\frac{\partial F_p}{\partial x} \\ \mu_0 \frac{\partial F_v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\frac{\partial F_p}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \mu_0 \frac{\partial F_v}{\partial \theta} &= \frac{1}{c} \frac{\partial F_p}{\partial \theta} \\ \text{intégration } \mu_0 F_v &= \frac{F_p}{c} + \text{cste} \\ \text{solution ondulatoire } \text{cste} &= 0 \\ \mu_0 v(x, t) &= \frac{p(x, t)}{c} \\ Z_a &= \frac{p_1}{v} = \mu_0 c \end{aligned}$$

5.4 Superposition d'OPPH

5.4.1 Ondes stationnaires

Soit une OPPH incidente se propageant dans le demi-espace $x < 0$ vers un obstacle imperméable situé en $x = 0$ et d'impédance $Z(x = 0) = \frac{p(x=0,t)}{v(x=0,t)} = \infty$ soit $v(x = 0, t) = 0$ car le fluide ne pénètre pas dans l'obstacle.

$$v_i = A_i \cos(\omega t - kx)$$

On cherche une solution de l'équation de d'Alembert type **onde plane stationnaire** qui résulte de la superposition de deux OPPH de même amplitude et se propageant en sens contraires :

$$v(x, t) = A \sin(kx) \sin(\omega t)$$

$$\text{soit } v(x, t) = \frac{A}{2} \cos(\omega t - kx) - \frac{A}{2} \cos(\omega t + kx)$$

en accord avec la CL $v(0, t) = 0$

$$\text{soit } Z(x = 0) = \infty$$

l'onde incidente progressive est $\vec{v}_i(x, t) = \frac{A}{2} \cos(\omega t - kx) \vec{u}$

$$A_i = \frac{A}{2}$$

l'onde régressive est $\vec{v}_r(x, t) = -\frac{A}{2} \cos(\omega t + kx) \vec{u}$

L'onde régressive est l'onde réfléchie par l'obstacle. Il n'y a pas de changement de fréquence pour une réflexion sur un obstacle fixe : $\omega_i = \omega_r = \omega = kc$

Quel est le champ de surpression $p_1(M, t)$ correspondant à cette onde stationnaire ?

L'impédance acoustique n'est définie que pour les OPP. Une onde stationnaire ne se propage pas et donc n'est pas une OPP. On doit donc utiliser la notion d'impédance acoustique pour chaque OPPH qui constitue l'onde stationnaire :

Pour l'onde incidente $p_{1i} = Z_a v_i$

Pour l'onde réfléchie $p_{1r} = -Z_a v_r$

superposition des 2 OPPH $p_1(x, t) = p_{1i}(x, t) + p_{1r}(x, t)$

$$p_1(x, t) = \frac{Z_a A}{2} \cos(\omega t - kx) + \frac{Z_a A}{2} \cos(\omega t + kx)$$

$$p_1(x, t) = AZ_a \cos(kx) \cos(\omega t)$$

Les ondes stationnaires de surpression et de vitesse sont en quadrature spatiale et temporelle car les nœuds de vitesse coïncident avec les ventres de surpression.

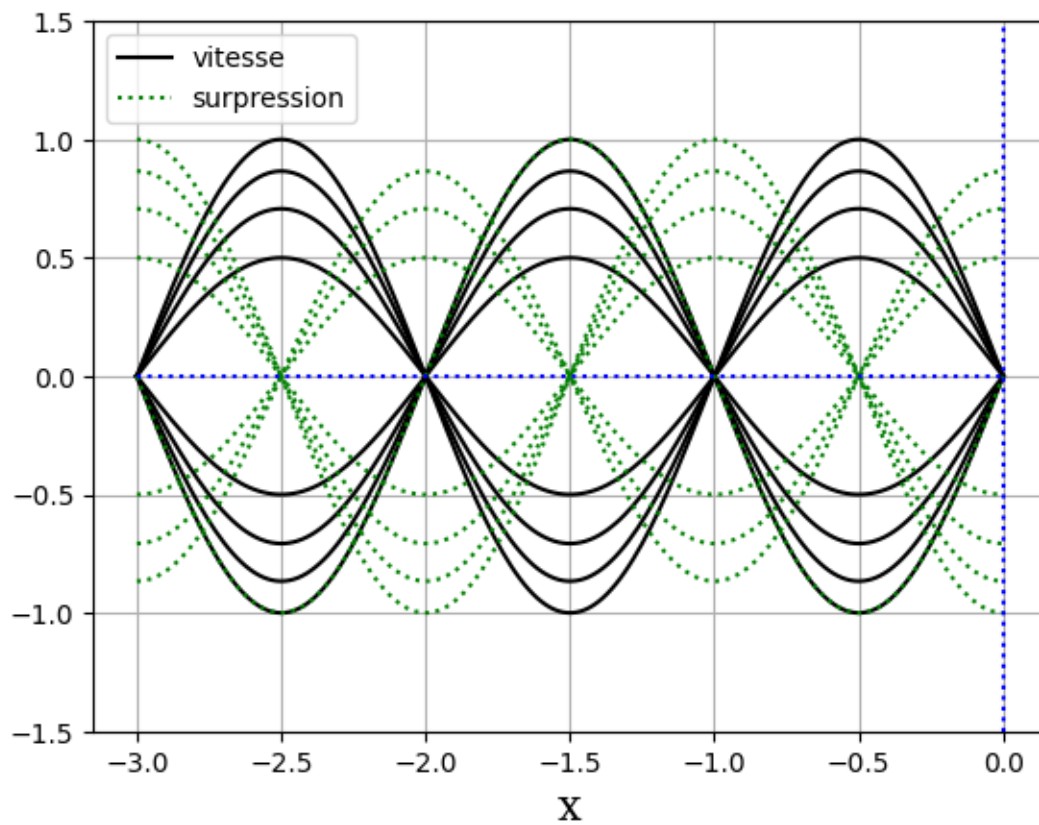
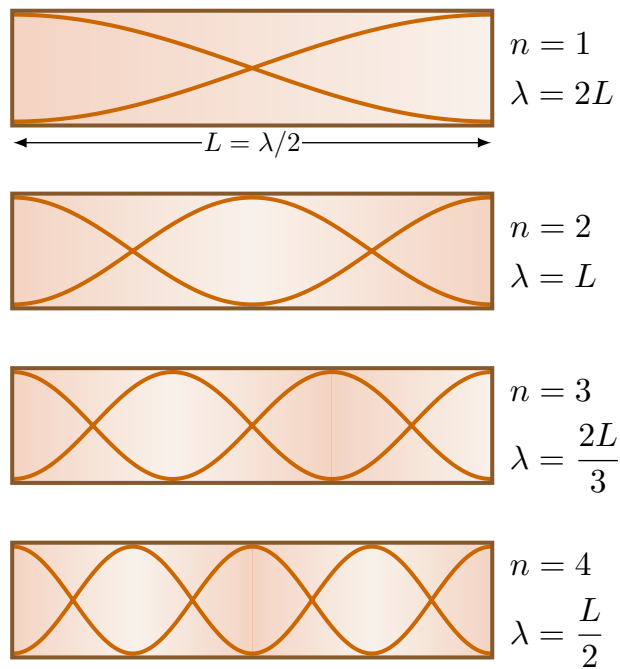
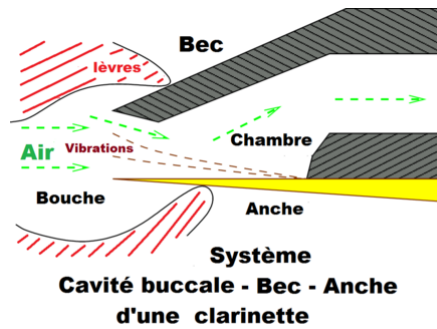
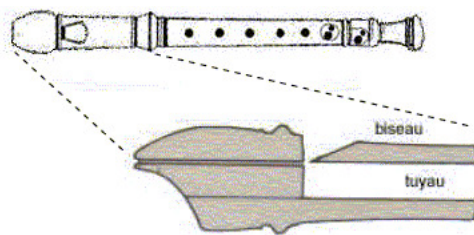


Figure 1: Onde de pression dans un tube fermé à ses deux extrémités.





la clarinette est un tuyau ouvert à une extrémité (noeud de surpression) et fermé à l'autre extrémité par une paroi rigide (anche du côté des lèvres) soit $v(x = L, t) = 0$ (ventre de surpression) soit $Z \rightarrow \infty$. On a alors : $L = n \frac{\lambda_n}{2} - \frac{\lambda_n}{4}$ Absence des harmoniques de rangs pairs !



d'après un site Internet

vue de dessus d'une flûte à bec et coupe transversale de son embouchure

le trombone ou la flûte sont des tuyaux ouverts à leurs deux extrémités : $p(x = 0, t) = 0$ et $p(x = L, t) = 0$ soit $Z = 0$. La relation $f_n = \frac{nc}{2L}$ est alors vraie. Pour une même note (même hauteur) c'est-à-dire même fondamental, la flûte et la clarinette n'auront pas le même timbre (richesse spectrale) du fait de l'absence des harmoniques de rangs pairs pour la clarinette.

Pour un tuyau de même longueur L , le fondamental de la flûte est tel que $\lambda_{1f} = 2L = \frac{c}{f_{1f}}$ et celui de la clarinette est tel que $\lambda_{1c} = 4L = \frac{c}{f_{1c}}$ d'où $f_{1c} = \frac{f_{1f}}{2}$. La clarinette joue donc à l'octave inférieure.

Le musicien ne souffle pas directement dans la flûte. En effet, l'air injecté par le bec ressort par une ouverture. C'est ce mouvement d'air à une extrémité qui fait vibrer le fluide contenu dans la flûte.

Figure 2: Onde de pression dans un tube ouvert à ses deux extrémités (trombone, flûte)

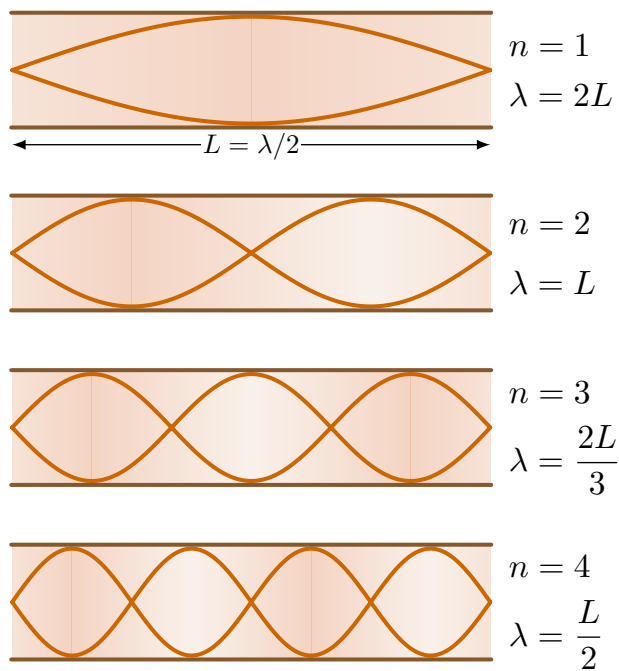
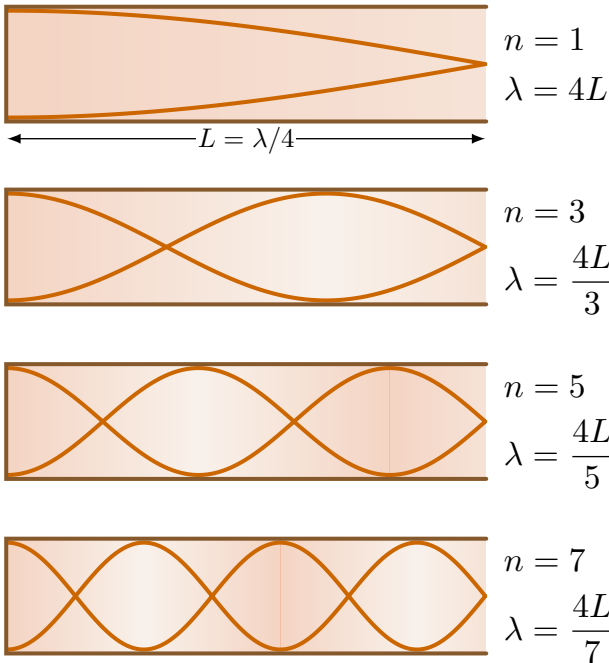


Figure 3: Onde de pression dans un tube fermé à gauche et ouvert à droite (clarinette)



5.5 Ondes sphériques harmoniques

5.5.1 Champ de pression

Soit une sphère pulsante (membrane de haut-parleur) de centre O et de rayon $a(t)$ qui émet d'une façon isotrope une onde acoustique dans un espace infini.

$$a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$$

On repère un point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) . La symétrie sphérique impose de chercher une solution de l'équation de d'Alembert de la forme $p_1(M, t) = p_1(r, t)$

L'opérateur laplacien en symétrie sphérique s'exprime de deux façons :

$$\Delta p_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p_1}{\partial r} \right)$$

$$\Delta p_1 = \frac{1}{r^2} \left(2r \frac{\partial p_1}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2} \right)$$

$$\text{d'autre part } \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial (rp_1)}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(p_1 + r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2}$$

$$\text{conclusion } \Delta p_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2}$$

On explicite l'équation de d'Alembert $\Delta p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial t^2} = 0$$

équation de d'Alembert à 1 dimension $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ avec $f(r, t) = rp_1(r, t)$

la solution est $f(r, t) = A_M \cos(\omega t - kr - \varphi)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$

Une onde sphérique harmonique divergente (-)/convergente (+) est de la forme (avec $k > 0$) :

$$p_1(r, t) = \frac{A_M}{r} \cos(\omega t \pm kr - \varphi)$$

Une onde sphérique est caractérisée par la décroissance en $\frac{1}{r}$ de son amplitude. Les surfaces d'onde (points équiphase) sont des sphères d'équation $r = cste$.

Il ne s'agit pas d'une atténuation mais d'une dilution. En effet, une puissance constante est rayonnée à travers une surface en $4\pi r^2$. L'intensité I en W.m^{-2} est en $\frac{1}{r^2}$ d'où l'amplitude en $\frac{1}{r}$.

5.5.2 Champ des vitesses

On reprend l'équation d'Euler :

en sphériques $\overrightarrow{\text{grad}}p_1(r, t) = \frac{\partial p_1}{\partial r} \vec{u}_r$

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial r} \vec{u}_r$$

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{A_M}{r^2} \cos(\omega t - kr - \varphi) \vec{u}_r - \frac{kA_M}{r} \sin(\omega t - kr - \varphi) \vec{u}_r$$

intégration à r fixé $\mu_0 \vec{v} = \frac{A_M}{\omega r^2} \sin(\omega t - kr - \varphi) \vec{u}_r + \frac{kA_M}{\omega r} \cos(\omega t - kr - \varphi) \vec{u}_r + \vec{C}(M)$

solution ondulatoire $\vec{C}(M) = \vec{0}$

On constate que \vec{v} est parallèle à la direction de propagation \vec{u}_r de l'onde sphérique. Les ondes sphériques harmoniques sont donc longitudinales.

Comparons les deux termes du champ de vitesse :

$$\frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{\omega r^2}} = \omega r = kcr = 2\pi c \frac{r}{\lambda}$$

Si $r \rightarrow +\infty$ soit $r \gg \lambda$ alors $\frac{1}{r}$ tend moins vite vers 0 que $\frac{1}{r^2}$. On dit donc que le terme en $\frac{1}{r}$ correspond au **champ lointain**.

Si $r \rightarrow 0$ soit $r \ll \lambda$ alors $\frac{1}{r^2} > \frac{1}{r}$. On dit donc que le terme en $\frac{1}{r^2}$ correspond au **champ proche**.

Comme \vec{v} et $p_1(r, t)$ ne vibrent pas en phase, on définit l'impédance acoustique en complexe :

$$\underline{Z}(r) = \frac{p_1}{v_1}$$

avec $\underline{p}_1 = \frac{A_M}{r} \exp(j\omega t - jkr - j\varphi)$

et $\underline{v} = \frac{-jA_M}{\mu_0\omega r^2} \exp(j\omega t - jkr - j\varphi) \vec{u}_r + \frac{kA_M}{\mu_0\omega r} \exp(j\omega t - jkr - j\varphi) \vec{u}_r$

car $\sin(\omega t - kr - \varphi) = \cos\left(\omega t - kr - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$

d'où $\sin(\omega t - kr - \varphi) = \text{Re}(\exp(j\omega t - jkr - j\varphi - j\frac{\pi}{2}))$

$$\sin(\omega t - kr - \varphi) = \text{Re}(\exp(j\omega t - jkr - j\varphi) \exp(-j\frac{\pi}{2}))$$

$$\sin(\omega t - kr - \varphi) = \text{Re}(-j \exp(j\omega t - jkr - j\varphi))$$

$$\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$$

d'où $\underline{Z}(r) = \frac{1}{\frac{1}{\mu_0 c} - \frac{j}{\mu_0 \omega r}}$

Finalement, l'impédance complexe est $\underline{Z}(r) = \frac{\mu_0 c}{1 - \frac{j}{kr}}$

si $r \gg \lambda$ alors \vec{v} s'approche au champ lointain :

$$\vec{v} \approx \frac{A_M}{\mu_0 cr} \cos(\omega t - kr - \varphi) \vec{u}_r$$

$$p_1 \approx Z_a v$$

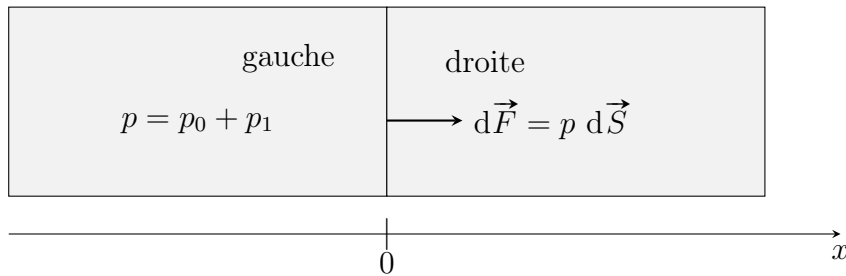
Localement r est quasi constant. On constate que le champ lointain s'approche à une onde plane.

Loin de la source, l'onde sphérique est localement plane.

6 Aspects énergétiques de la propagation d'une onde acoustique

6.1 Puissance échangée à travers une surface (S)

6.1.1 Vecteur densité de courant d'énergie acoustique



Le fluide situé à gauche exerce sur le fluide situé à droite la force de pression $d\vec{F} = (p_0 + p_1)d\vec{S}$

Sous l'effet de l'onde acoustique, l'élément de surface se déplace à la vitesse \vec{v} . La puissance développée par $d\vec{F}$ est fournie à la partie droite :

$$d\mathcal{P}_t = d\vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\text{soit } d\mathcal{P}_t = (p_0 + p_1)\vec{v} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{or } \langle p_0 \vec{v} \rangle = p_0 \langle \vec{v} \rangle = 0$$

$$\text{car quand } \vec{v} \text{ vibre } \langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$$

$$\text{d'où la puissance acoustique } d\mathcal{P} = p_1 \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{et l'énergie acoustique } \delta^2 E = p_1 \vec{v} \cdot d\vec{S} dt$$

Par **analogie avec tous les phénomènes de transport** (masse, charge, énergie thermique, particules), on définit :

Le **vecteur densité de courant d'énergie acoustique** ou vecteur de Poynting acoustique :

$$\vec{J} = p_1 \vec{v}$$

Le flux de \vec{J} à travers une surface (S) représente à la **puissance acoustique** qui traverse (S). L'énergie qui traverse (S) pendant dt est :

$$\delta^2 E = \vec{J} \cdot d\vec{S} dt$$

Les bilans énergétiques font donc intervenir des termes d'ordre 2.

6.1.2 Intensité sonore

L'oreille est un capteur approximativement logarithmique.

L'intensité acoustique est définie par :

$$I = \langle J \rangle = \langle p_1 v \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{p} \underline{v}^*)$$

Le niveau sonore (Level) représente l'intensité acoustique mesurée en décibels (dB) défini par :

$$L = 10 \log \left(\frac{\langle J \rangle}{\langle J_0 \rangle} \right) = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

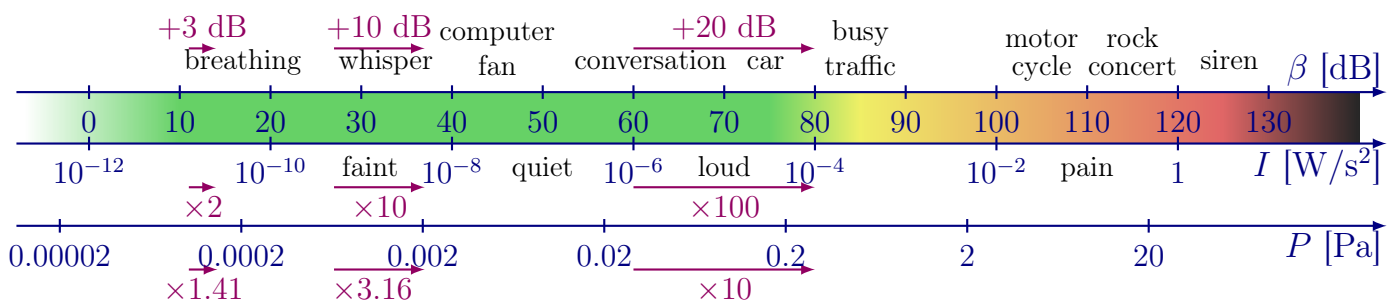
où la valeur de référence correspondant à 0 dB est le seuil d'audition d'une oreille moyenne fixé à $f = 1 \text{ kHz}$:

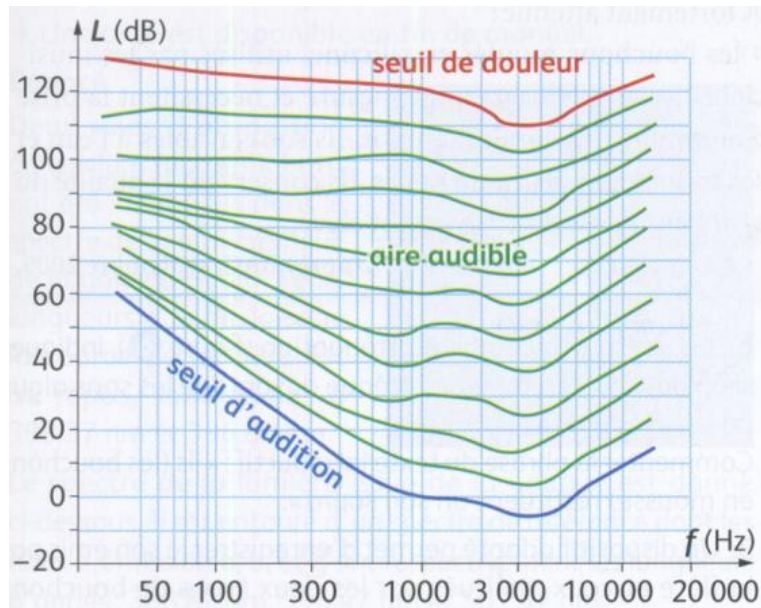
$$I_0 = \langle J_0 \rangle = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$$

Le seuil de douleur à $f = 1 \text{ kHz}$ est $I_{max} = 1 \text{ W.m}^{-2}$ soit $L = 120 \text{ dB}$.

Il faut connaître les ordres de grandeur suivants :

Son	Seuil d'audition	Voix normale à 1m	Marteau piqueur à 1 m	Seuil de douleur
$L(\text{dB})$	0 à 10	60 à 65	100	120





6.2 Bilan énergétique local

$$\operatorname{div}(p_1 \vec{v}) = p_1 \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} p_1$$

On reprend l'équation d'Euler linéarisée qu'on multiplie respectivement par \vec{v} et l'équation locale de conservation de la masse linéarisée qu'on multiplie par p_1 :

$$\mu_0 \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} p_1$$

$$\text{et } \chi_s p_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -p_1 \operatorname{div}(\vec{v})$$

$$\text{d'où } \operatorname{div}(p_1 \vec{v}) = -\chi_s p_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \mu_0 \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$\text{d'où } \operatorname{div}(p_1 \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \chi_s p_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 \right) = 0$$

L'équation bilan locale traduit la **conservation de l'énergie acoustique** E : la variation de l'énergie sonore d'un volume (V) est due seulement à la **puissance échangée avec l'extérieur** à travers la surface fermée (Σ) délimitant (V) : il n'y a **pas de terme de création**.

$$\operatorname{div}(\vec{J}) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \quad \text{avec } e = \frac{\delta E}{d\tau} = \frac{1}{2} \chi_s p_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v^2$$

L'onde sonore met en mouvement le fluide d'où l'**énergie cinétique** volumique $e_c = \frac{1}{2} \mu_0 v^2$

On admettra que l'onde sonore provoque un accroissement de l'**énergie potentielle (ou interne)** volumique du fluide $u = \frac{1}{2} \chi_s p_1^2$

6.3 Cas d'une OPPH

6.3.1 Expression de la densité volumique d'énergie acoustique

Pour une OPPH :

$$v = \frac{p_1}{Z_a} = \frac{p_1}{\mu_0 c} \quad \text{d'où } e_c = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{p_1}{\mu_0 c} \right)^2$$

$$e_c = \frac{p_1^2}{2 \mu_0 c^2} = \frac{1}{2} \chi_s p_1^2$$

soit l'équipartition de l'énergie $e_c = u$ or $e = e_c + u$ d'où $e = 2e_c$

pour une OPPH $v(x, t) = v_M \cos(\omega t - kx)$ d'où $\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 \langle v^2 \rangle$

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 v_M^2$$

On constate que $\langle e \rangle$ est uniforme. Par conséquent l'énergie acoustique moyenne $\langle E \rangle$ dans tout l'espace est infinie. On en déduit que le **caractère non physique des OPPH**.

$$\langle E \rangle = \iiint_{\text{espace}} e d\tau = e \iiint d\tau = e V_{\text{espace}} \rightarrow +\infty$$

$$\langle \vec{J} \rangle = \langle p_1 v \rangle \vec{u} = \mu_0 c \langle v^2 \rangle \vec{u} = \frac{1}{2} \mu_0 c v_M^2 \vec{u}$$

$$\text{d'où } v_M = \sqrt{\frac{2 \langle J \rangle}{\mu_0 c}}$$

6.3.2 Validité de l'approximation acoustique

Considérons l'intensité sonore de 120 dB correspondant au seuil de douleur de l'oreille pour vérifier l'approximation acoustique :

$$\frac{\langle J \rangle}{\langle J_0 \rangle} = 10^{12}$$

$$\langle J \rangle = 10^{13-12} = 1 \text{ W.m}^{-2}$$

à la température ambiante $T_0 = 300 \text{ K}$ la masse volumique de l'air $\mu_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$
et $c = 3,4 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$

$$\text{d'où } v_M = \sqrt{\frac{2 \times 1}{1,3 \times 3,4 \cdot 10^2}} \approx 0,07 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{d'où } p_{1M} = \mu_0 c v_M \approx 30 \text{ Pa} \quad \text{soit } \frac{p_{1M}}{p_0} \approx \frac{10^1}{10^5} \approx 10^{-4} \ll 1$$

Comparons l'accélération convective avec l'accélération locale :

$$\text{l'accélération locale } \left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \approx \frac{v}{T}$$

$$\text{et l'accélération convective } \left\| \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v \right\| \approx \frac{v^2}{\lambda}$$

$$\text{d'où } \frac{\left\| \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v \right\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|} \approx \frac{vT}{\lambda} \quad \text{or } \lambda = cT$$

$$\text{d'où } \frac{\left\| \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v \right\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|} \approx \frac{v}{c} \approx 2 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

L'accélération convective est bien négligeable.

6.4 Cas d'une onde stationnaire

$$\vec{J} = p_1 \vec{v} = A^2 Z_a \cos(kx) \sin(kx) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{u}_x$$

$$\vec{J} = \frac{A_i^2}{4} \mu_0 c \sin(2kx) \sin(2\omega t) \vec{u}_x$$

$$\text{car } 2 \cos(kx) \sin(kx) = \sin(2kx) \quad \text{et } 2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) = \sin(2\omega t)$$

$$\text{d'où la moyenne temporelle } \langle \vec{J} \rangle_t = \frac{A_i^2}{4} \mu_0 c \sin(2kx) \langle \sin(2\omega t) \rangle_t \vec{u}_x$$

$$\text{or } \langle \sin(2\omega t) \rangle_t = 0$$

♡ Une onde stationnaire ne transporte en moyenne temporelle aucune énergie :

$$\langle \vec{J} \rangle_t = \vec{0}$$

6.5 Cas d'une onde sphérique harmonique divergente

$$\vec{J} = p_1 \vec{v} = \left(\frac{A_M^2}{\mu_0 \omega r^3} \sin(\omega t - kr - \varphi) \cos(\omega t - kr - \varphi) + \frac{A_M^2}{\mu_0 c r^2} \cos^2(\omega t - kr - \varphi) \right) \vec{u}_r$$

$$\text{or } \langle \sin(\omega t - kr - \varphi) \cos(\omega t - kr - \varphi) \rangle_t = \frac{1}{2} \langle \sin(2\omega t - 2kr - 2\varphi) \rangle_t = 0$$

$$\text{et } \langle \cos^2(\omega t - kr - \varphi) \rangle_t = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \langle \vec{J} \rangle_t = \frac{A_M^2}{2\mu_0 c r^2} \vec{u}_r$$

On constate donc que seul le champ lointain de la vitesse contribue à l'intensité sonore car il est en phase avec la surpression.

On en déduit la puissance sonore moyenne traversant la sphère de centre O et de rayon r :

$$\langle \mathcal{P}(r) \rangle = \iint_{(S)} \langle \vec{J} \rangle \cdot \vec{dS} = \iint_{(S)} \frac{A_M^2}{2\mu_0 c r^2} dS = \frac{A_M^2}{2\mu_0 c r^2} \iint_{(S)} dS$$

$$\text{or } \iint_{(S)} dS = 4\pi r^2 \quad \text{d'où } \langle \mathcal{P}(r) \rangle_t = \frac{2\pi A_M^2}{\mu_0 c} = \text{cste}$$

♡ Pour l'onde sphérique une puissance sonore constante se dilue à travers une surface qui croît en r^2 . Il en résulte que l'amplitude de l'onde sphérique décroît en $\frac{1}{r}$.

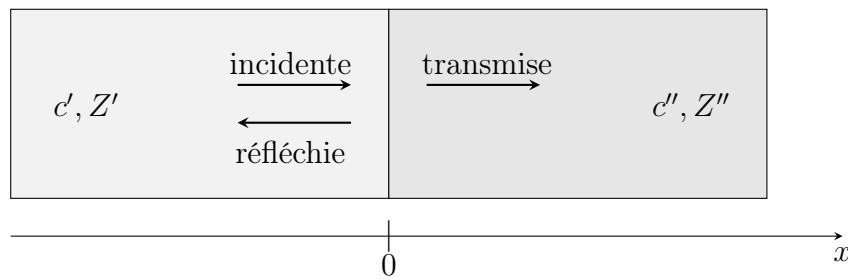
7 Réflexion et transmission d'une onde plane progressive sous incidence normale

7.1 Position du problème-Conditions aux limites

7.1.1 Dioptré acoustique

On considère une onde acoustique se propageant dans un tuyau sonore de section droite (\mathcal{S}) constante. Elle arrive en **incidence normale** sur un dioptré acoustique situé en $x = 0$. C'est

l'interface entre deux fluides (D') et (D'') différents (exemple : air/eau).



Une OPP incidente sur le dioptre donne *a priori* naissance à une onde transmise dans le domaine (D'') et à une onde réfléchie. On note p'_1 et p''_1 et les surpressions, v'_1 et v''_1 les vitesses dans les deux milieux. Dans l'approximation acoustique $|v_1| \ll c$ et le déplacement u de l'interface est faible devant la longueur d'onde. Ainsi, l'interface reste confondue avec le plan $x = 0$.

7.1.2 Conditions aux limites

En effet, d'après la loi de la quantité de mouvement appliquée à l'interface de masse nulle et en projection sur l'axe (Ox) :

$$0 = [p_0 + p'_1(x = 0^-, t)]dS - [p_0 + p''_1(x = 0^+, t)]dS$$

D'où la continuité des surpressions en $x = 0$:

$$p'_1(0, t) = p''_1(0, t)$$

D'autre part, l'interface se comporte comme une membrane mobile et imperméable car les deux fluides sont non miscibles. Si les molécules du fluide de gauche se déplacent à $v'(0, t)$ alors elles poussent les molécules de droite à la même vitesse $v'(0, t) = v''(0, t)$.

Par conséquent, il y a continuité des composantes normales des vitesses et donc du débit volumique Sv :

$$v'(0, t) = v''(0, t)$$

La vitesse de pénétration est la composante normale de la **vitesse relative** i.e la vitesse du fluide par rapport à la membrane $[\vec{v}'(0, t) - \vec{v}''(0, t)] \cdot \vec{n}$. Elle est nulle si l'obstacle est imperméable.

7.1.3 Nécessité d'une onde réfléchie

S'il n'y avait pas d'onde réfléchie on aurait $Z'_a = \frac{p'_1}{v'_1}$ et $Z''_a = \frac{p''_1}{v''_1}$. Or la continuité de la vitesse et de la surpression en $x = 0$ impliquerait $Z'_a = Z''_a$. Or les milieux étant différents $Z'_a \neq Z''_a$. Il est donc nécessaire d'introduire une OPP réfléchie. L'onde totale (ou résultante) dans le 1er milieu est donc la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

L'OPP incidente est telle que $p_i(x, t) = Z'_a v_i(t - \frac{x}{c'})$.

L'OPP réfléchie est telle que $p_r(x, t) = -Z'_a v_r(t + \frac{x}{c'})$.

L'OPP transmise est telle que $p_t(x, t) = Z''_a v_t(t - \frac{x}{c''})$.

L'onde totale n'est pas une OPP *a priori* et donc $p'_1 \neq Z'_a v'$.

7.2 Coefficients de réflexion et de transmission des amplitudes

Les 2 CL se traduisent par les deux relations de continuité sur l'onde totale :

$$\begin{aligned} \text{CL2 } p_i(0, t) + p_r(0, t) &= p_t(0, t) \\ \text{soit } Z'_a v_i(0, t) - Z'_a v_r(0, t) &= Z''_a v_t(0, t) \\ \text{CL1 } v_i(0, t) + v_r(0, t) &= v_t(0, t) \end{aligned}$$

♡ Les **coefficients de transmission** t_v et de **réflexion** r_v de l'amplitude du champ des vitesses sont :

$$\begin{aligned} t_v &= \frac{v_t(0, t)}{v_i(0, t)} = \frac{2Z'_a}{Z'_a + Z''_a} \\ r_v &= \frac{v_r(0, t)}{v_i(0, t)} = \frac{Z'_a - Z''_a}{Z'_a + Z''_a} \end{aligned}$$

pas d'onde réfléchie si $Z'_a = Z''_a$

De même les **coefficients de transmission** t_p et de réflexion r_p de l'amplitude des surpressions sont :

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{Z''_a v_t(0, t)}{Z'_a v_i(0, t)} = t_v \frac{Z''_a}{Z'_a} \\ r_p &= \frac{-Z'_a v_r(0, t)}{Z'_a v_i(0, t)} = -r_v \end{aligned}$$

En l'absence d'onde réfléchie, on dit qu'il y a **adaptation d'impédance** $Z'_a = Z''_a$

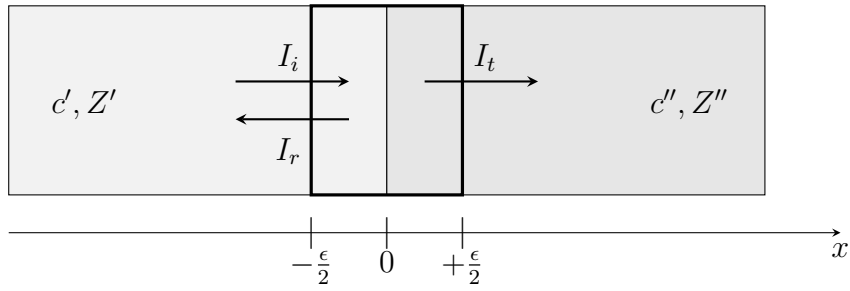
L'onde sonore dans le domaine (D') résulte de la superposition de deux OPP se propageant en sens opposé. C'est une onde stationnaire seulement si les deux OPP sont de même amplitude :

$$\begin{aligned} \text{absence d'onde transmise si } t_v &= 0 \quad \text{soit } Z''_a \rightarrow \infty \quad \text{d'où } r_v = -1 \\ \text{soit } v_r(0, t) &= -v_i(0, t) \\ \text{or } Z''_a &= \mu''_0 c'' = \sqrt{\frac{\mu''_0}{\chi''_s}} \quad \text{d'où } \chi''_s \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Cette situation de **réflexion totale** correspond à un **mur solide indéformable**.

7.3 Coefficients de réflexion et de transmission des puissances surfaciques moyennes

Il s'agit de réaliser un bilan de puissance moyenne pour le volume élémentaire à cheval sur l'interface, d'épaisseur ε et s'appuyant sur un élément de surface dS .



Exprimons les moyennes temporelles des vecteurs densité de flux énergétique pour chacune des 3 ondes :

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{J}_i \rangle &= \langle p_{1i} \vec{v}_i \rangle = Z'_a \langle \vec{v}_i^2 \rangle \vec{u}_x \\
 &\text{avec } v_i = A_i \cos(\omega t - k'x) \\
 \text{d'où } \langle \vec{J}_i \rangle &= \frac{Z'_a}{2} A_i^2 \vec{u}_x \\
 \langle \vec{J}_r \rangle &= \langle p_{1r} \vec{v}_r \rangle = Z'_a \langle \vec{v}_r^2 \rangle (-\vec{u}_x) \\
 &\text{avec } v_r = A_r \cos(\omega t + k'x) \\
 \text{d'où } \langle \vec{J}_r \rangle &= -\frac{Z'_a}{2} A_r^2 \vec{u}_x \\
 \langle \vec{J}_t \rangle &= \langle p_{1t} \vec{v}_t \rangle = Z''_a \langle \vec{v}_t^2 \rangle \vec{u}_x \\
 &\text{avec } v_t = A_t \cos(\omega t - k''x) \\
 \text{d'où } \langle \vec{J}_t \rangle &= \frac{Z''_a}{2} A_t^2 \vec{u}_x
 \end{aligned}$$

Exprimons les puissances surfaciques transportées par chaque onde dans son sens de propagation :

$$\begin{aligned}
 I_i &= \langle \vec{J}_i \cdot \vec{u}_x \rangle = \frac{Z'_a}{2} A_i^2 \\
 I_r &= \langle \vec{J}_r \cdot (-\vec{u}_x) \rangle = \frac{Z'_a}{2} A_r^2 = \frac{Z'_a}{2} r_v^2 A_i^2 \\
 I_t &= \langle \vec{J}_t \cdot \vec{u}_x \rangle = \frac{Z''_a}{2} A_t^2 = \frac{Z''_a}{2} t_v^2 A_i^2
 \end{aligned}$$

♡ Les **coefficients de réflexion et transmission des puissances moyennes surfaciques** sont définis par :

$$R = \frac{I_r}{I_i} = r_v^2 = \left(\frac{Z''_a - Z'_a}{Z''_a + Z'_a} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{I_t}{I_i} = t_v^2 \frac{Z''_a}{Z'_a} = \frac{4Z''_a Z'_a}{(Z''_a + Z'_a)^2}$$

En moyenne, l'énergie contenue dans le volume élémentaire à cheval sur l'interface ne varie pas et donc la puissance entrant est égale à la puissance sortant :

$$\langle d\mathcal{P}_i \rangle dt - \langle d\mathcal{P}_r \rangle dt - \langle d\mathcal{P}_{tr} \rangle dt = 0$$

$$\text{soit } \frac{\langle \frac{d\mathcal{P}_r}{dS} \rangle}{\langle \frac{d\mathcal{P}_i}{dS} \rangle} + \frac{\langle \frac{d\mathcal{P}_{tr}}{dS} \rangle}{\langle \frac{d\mathcal{P}_i}{dS} \rangle} = 1$$

$$I_i = I_r + I_t$$

$$1 = \frac{I_r}{I_i} + \frac{I_t}{I_i}$$

- ♡ La puissance incidente se répartit intégralement entre les puissances réfléchie et transmise $R + T = 1$
- ♡ Une interface ne transmet correctement les ondes sonores que s'il y a **adaptation d'impédance** :

la puissance transmise est maximum $T \approx T_{max} = 1$

absence d'onde réfléchie $R \approx 0$

$$Z'_a \approx Z''_a$$

Exemple 1 : lors d'une échographie, un gel est appliqué sur la peau pour réaliser une adaptation d'impédance. Ainsi les ultrasons sont transmis dans le corps en évitant leur réflexion.

Exemple 2 : La transmission du son est très difficile par une interface air/eau. En effet :

$$\frac{Z_{air}}{Z_{eau}} = \frac{\mu_{air}c_{air}}{\mu_{eau}c_{eau}} = \frac{1,2 \times 340}{1,0 \cdot 10^3 \times 1,5 \cdot 10^3} \approx 3 \cdot 10^{-4} \quad \text{d'où } Z_{eau} \gg Z_{air}$$

d'où $T \rightarrow 0$ et $R \rightarrow 1$

7.4 Raccordement de deux tuyaux

On considère deux tuyaux de sections droites différentes, coaxiaux et raccordés en $x = 0$.

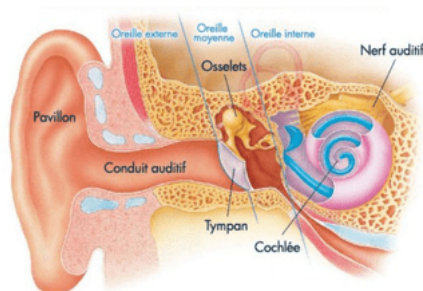
La continuité du débit volumique s'écrit $S'v(x = 0^-, t) = S''v(x = 0^+, t)$

La continuité de la pression s'écrit : $p(x = 0^-, t) = p(x = 0^+, t)$

Le coefficient de réflexion en puissance devient $R = r_v^2 = \left(\frac{\frac{Z'_a}{S'} - \frac{Z''_a}{S''}}{\frac{Z'_a}{S'} + \frac{Z''_a}{S''}} \right)^2$

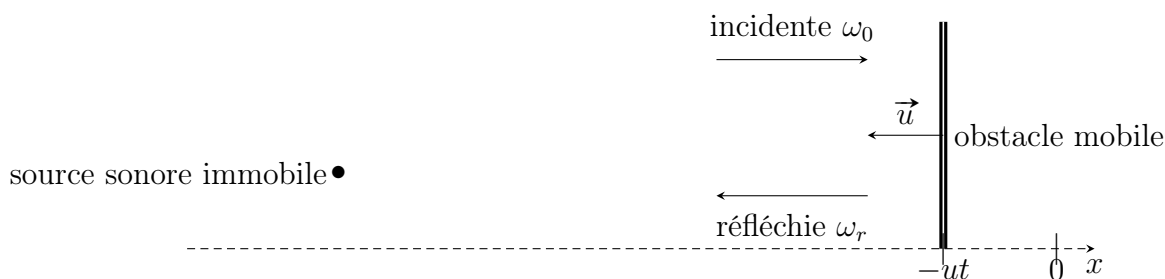
A la sortie d'une flûte ou d'une clarinette $Z' = Z''$ (pas de changement de milieu air/air) on a $R = \left(\frac{S'' - S'}{S'' + S'} \right)^2$. Or, $S' \ll S'' \rightarrow \infty$ d'où $R \rightarrow 1$ donc $T \rightarrow 0$. La transmission est très mauvaise. On améliore la transmission en augmentant la surface progressivement à l'aide d'un pavillon. Exemple : porte-voix, phonographe.

L'oreille humaine est un récepteur équipé d'un pavillon qui recueille les ondes sonores qui sont ensuite conduites par le long du conduit auditif jusqu'au tympan qui les amplifie. Le pavillon contribue à amplifier les ondes sonores (voir exercice tuyau de section variable).



8 Mesure de la vitesse par effet Doppler

8.1 L'effet Doppler



On considère une OPPH comme onde incidente émise par la source sonore immobile (ex: radar) $v_i(x, t) = v_{0i} \cos(\omega_0 t - k_0 x)$.

L'onde réfléchiée par l'obstacle (ex : voiture) est une OPPH. Dans le référentiel lié à l'obstacle elle vaut $v_{0r} \cos(\omega_r t + k_r x)$.

On change de référentiel pour exprimer l'OPPH réfléchiée par rapport à la source en appliquant la loi de composition des vitesses $v_{0r} \cos(\omega_r t + k_r x) \vec{e}_x + \vec{u}$ soit :

$$v_r(x, t) = v_{0r} \cos(\omega_r t + k_r x) - u$$

Dans le référentiel lié à la source immobile, chaque OPPH vérifie l'équation de propagation de d'Alembert d'où

$$c = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{\omega_r}{k_r}$$

D'après la condition aux limites sur l'obstacle (en $x = -ut$) imperméable et mobile, l'onde totale est telle que :

$$\forall t, v_i(x = -ut, t) + v_r(x = -ut, t) = -u$$

$$\begin{aligned}
& \text{d'où } v_{0i} \cos(\omega_0 t + k_0 u t) + v_{0r} \cos(\omega_r t - k_r u t) - u = -u \\
& \forall t, v_{0i} \cos\left(\omega_0\left(1 + \frac{u}{c}\right)t\right) + v_{0r} \cos\left(\omega_r\left(1 - \frac{u}{c}\right)t\right) = 0 \\
& \text{d'où } \omega_0\left(1 + \frac{u}{c}\right) = \omega_r\left(1 - \frac{u}{c}\right) \\
& \frac{\omega_r}{\omega_0} = \frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}} \\
& \text{or } u \ll c \text{ donc dl au 1er ordre en } \frac{u}{c} \quad \frac{\omega_r}{\omega_0} \approx 1 + 2\frac{u}{c} \\
& \text{d'où } \Delta\omega = \omega_r - \omega_0 = 2\omega_0 \frac{u}{c}
\end{aligned}$$

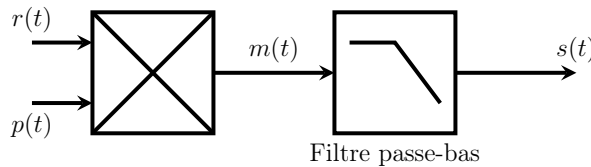
Si l'obstacle se rapproche de la source $u > 0$ alors $\omega_r > \omega_i$ le son réfléchi est plus aigu que le son émis sinon il est plus grave.

Dans le cas particulier important où l'obstacle est fixe $u = 0$ la fréquence est conservée car $\omega_i = \omega_r$.

L'**effet Doppler** est la variation de fréquence d'une onde lors de sa réflexion (ou transmission) sur un obstacle mobile.

8.2 Détection synchrone

On parle de détection synchrone ou détection hétérodyne.



Un émetteur à ultrasons $f = 40 \text{ kHz}$ émet l'onde incidente en étant alimenté par un GBF. Le signal issu du GBF est $p(t) = p_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_p)$. Un capteur à ultrasons (récepteur sensible à la surpression acoustique) capte l'OPPH réfléchi par l'obstacle mobile. On récupère le signal $r(t) = r_0 \cos(\omega_r t + \varphi_r)$ proportionnelle à l'onde de surpression.

Le radar routier émet le signal (lié à l'onde incidente) $p(t)$ et reçoit le signal $r(t)$ lié à l'onde réfléchie.

Le signal multiplié est :

$$\begin{aligned}
m(t) &= K r(t) p(t) \\
m(t) &= \frac{K r_0 p_0}{2} \left(\cos((\omega_r - \omega_0)t + (\varphi_r - \varphi_p)) + \cos((\omega_r + \omega_0)t + (\varphi_r + \varphi_p)) \right) \\
m(t) &= \frac{K r_0 p_0}{2} \left(\cos\left(2\omega_0 \frac{u}{c} t + (\varphi_r - \varphi_p)\right) + \cos(2\omega_0 t + (\varphi_r + \varphi_p)) \right)
\end{aligned}$$

Un filtre passe-bas d'ordre 1 filtre la composante HF $2\omega_0$. Puis on mesure la fréquence $2f_0 \frac{u}{c}$ du signal $s(t)$ à l'oscilloscope. On en déduit la vitesse u de la voiture.