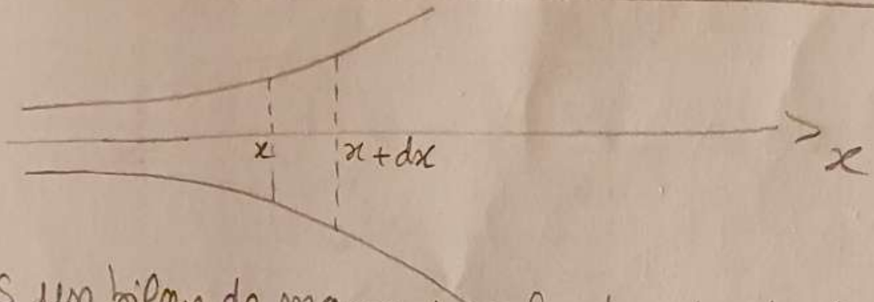
Onde acoustique dans une conduite de section variable = Pavillon exponentiel

$S(x) = S_0 \exp(\sigma x)$

1)



D'après un bilan de masse sur la tranche de tuyau située entre x et $x+dx$, pendant dt :

$$S[\mu(x,t+dt)-\mu(x,t)]dx = \phi_e(x,t)\,dt - \phi_s(x+dx,t)\,dt$$

$$S\frac{\partial \mu}{\partial t}\cancel{dt}\,dx = j_m(x,t)\,S(x)\cancel{dt} - j_m(x+dx,t)\,S(x+dx)\cancel{dt}$$

$$S\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\mu(x,t)v(x,t)S(x) - \mu(x+dx,t)v(x+dx,t)S(x+dx)}{dx}$$

$$S\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\frac{\partial(\mu v S)}{\partial x}$$

$$\cancel{S}\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\cancel{S}v\frac{\partial \mu}{\partial x} - \cancel{S}\mu\frac{\partial v}{\partial x} - \mu v \sigma \cancel{S}\;dx$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\underbrace{\cancel{v_1\frac{\partial \mu_1}{\partial x}}}_{\text{2nd ordre}} - \mu_0\frac{\partial v_1}{\partial x} - \mu_0 v_1 \sigma$$

dans l'approximation acoustique : $\mu_1(x,t) \ll \mu_0$ et $v_1(x,t) \ll c$, $p_1(x,t) \ll P_0$.

$$\boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial v_1}{\partial x} - \mu_0 v_1 \sigma} \quad (1)$$

2) D'après l'équation d'Euler linéarisée :

$$\mu_0\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (2)$$

- L'évolution est isentropique donc $\chi_S \simeq \frac{1}{\mu_0}\frac{\mu_1}{p_1}$

d'où $\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \chi_S \mu_0 \frac{\partial p_1}{\partial t}$ (3)

Identification (1) et (3) : $-\cancel{\mu_0}\frac{\partial v_1}{\partial x} - \cancel{\mu_0} v_1\sigma = \chi_S \cancel{\mu_0}\frac{\partial p_1}{\partial t}$ (4)

$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial x} = -\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$ d'après $\frac{\partial(2)}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\chi_S}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)$ d'après $\frac{\partial(4)}{\partial x}$

D'après le théorème de Schwarz : $\frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial t}$

d'où $-\mu_0\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{\sigma}{\chi_S}\frac{\partial v_1}{\partial x}$

2)

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\sigma \frac{\partial v_1}{\partial x}$$ L'équation de propagation de l'onde de vitesse $v_1(x,t)$ est la suivante :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\sigma \frac{\partial v_1}{\partial x} \text{ en posant } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}}$$

Dans le cas particulier où $\sigma = 0$ i.e $S(x) = \text{cste}\ \forall x$ on retrouve bien une équation de d'Alembert.

De même $\frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t}$

$$-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = -\sigma \frac{\partial v_1}{\partial t} - \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \sigma\left(\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}\right) + \mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\sigma \frac{\partial p_1}{\partial x}}$$ est l'équation de propagation de l'onde de pression $p_1(x,t)$

3) L'équation de propagation est linéaire. En complexe elle s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \underline{v}_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{v}_1}{\partial t^2} = -\sigma \frac{\partial \underline{v}_1}{\partial x} \quad \text{avec } \underline{v}_1(x,t) = A\exp(i\omega t - ikx)$$

$$(-ik)^2 \underline{v}_1 - \frac{1}{c^2}(i\omega)^2 \underline{v}_1 = -\sigma(-ik)\underline{v}_1$$

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \sigma i k$$

L'équation de dispersion est :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\sigma k}$$

$$k^2 + i\sigma k - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \qquad \Delta = (i\sigma)^2 + 4\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{4\omega^2}{c^2} - \sigma^2$$

ω_c est telle que $\Delta = 0$: $\frac{4\omega_c^2}{c^2} = \sigma^2$ $\quad \boxed{\omega_c = \frac{c\sigma}{2}}$

d'où $\Delta = \frac{4}{c^2}(\omega^2 - \omega_c^2)$

si $\omega \leq \omega_c$ alors $\Delta \leq 0$: $k = -\frac{i\sigma}{2} - \frac{\cancel{2}i}{\cancel{2}c}\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} = k' + ik''$

avec $k' = \mathrm{Re}(k) = 0$

et $k'' = \mathrm{Im}(k) = -\frac{1}{\delta}$ avec $\frac{1}{\delta} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\omega_c^2 - \omega^2}{c}} > 0$

$\underline{v}_1(x,t) = A\exp(i\omega t - ik''x)$

$\underline{v}_1(x,t) = A\exp(k''x)\exp(i\omega t)$

$\underline{v}_1(x,t) = A\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp(i\omega t)$

$v_1(x,t) = Re(\underline{v}_1(x,t))$

$$\boxed{v_1(x,t) = A\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos(\omega t)} = f(x)\times g(t)$$

Onde stationnaire amortie appelée $\boxed{\text{onde évanescente}}$ dans la peau d'épaisseur δ.

Cette onde étant stationnaire elle ne se propage pas dans le tuyau.

4) Si $\omega > \omega_c$ alors $\Delta > 0$ d'où $k = -\frac{i\sigma}{2} \pm \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_c^2} = k' + ik''$

avec $k' = Re(k) = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}$ et $k'' = Re(k) = -\frac{\sigma}{2} = -\frac{1}{\delta}$

soit $\delta = \frac{2}{\sigma} > 0$

d'où $\underline{v}_1(x,t) = A\exp\left[i\omega t - i\left(k' - \frac{i}{\delta}\right)x\right]$

$$\underline{v}_1(x,t) = A\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp(i\omega t - ik'x)$$

$$\boxed{v_1(x,t) = A\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos(\omega t - k'x)} \text{ avec } k' = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_c^2} > 0$$

pour que $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$ ne diverge pas dans le sens de propagation ($x \nearrow$)

Il s'agit d'une OPPH

avec • absorption car son amplitude $\searrow$ au cours de la propagation

et • dispersion car la vitesse de phase $v_\varphi = v_\varphi(\omega)$

5) Dans le cas où $\omega > \omega_c$: $v_\varphi = \frac{\omega}{Re(k)} = \frac{\omega}{k'}$ par définition.

le cornet acoustique est un filtre passe-haut

$$v_\varphi = c\,\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}$$

$$\boxed{v_\varphi(\omega) = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} > c}$$

La vitesse de groupe est définie par $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

Or $k^2 + i\sigma k - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

dérivons / k : $2k + i\sigma - \frac{2}{c^2}\omega\frac{d\omega}{dk} = 0$

d'où $2\frac{k}{\omega} + i\frac{\sigma}{\omega} - \frac{2}{c^2}v_g = 0.$

$$2\left(\frac{k'}{\omega} - \cancel{\frac{i\sigma}{2\omega}}\right) + \cancel{\frac{i\sigma}{\omega}} - \frac{2}{c^2}v_g = 0.$$

d'où $\frac{\cancel{2}}{v_\varphi} - \frac{\cancel{2}v_g}{c^2} = 0$

$$v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}$$

$$\boxed{v_g = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} < c}$$

6) $e_c(x,t) = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2(x,t)$ et $e_p(x,t) = \frac{1}{2}\chi_s p_1^2(x,t)$

$e = e_c + e_p$: densité volumique d'énergie acoustique.

or $p_1(x,t) = P_m \exp(-\frac{x}{\delta}) \cos(\omega t - k'x)$

$\langle e_p(x,t)\rangle_t = \frac{\chi_s}{2} P_M^2 \exp(-\frac{2x}{\delta}) \underbrace{\langle \cos^2(\omega t - k'x)\rangle_t}_{=1/2}$

$\langle e_p(x,t)\rangle_t = \frac{\chi_s}{4} P_M^2 \exp(-\frac{2x}{\delta})$ avec $\chi_s = \frac{1}{\mu_0 c^2}$

D'après l'équation d'Euler linéarisée : $\frac{\partial \underline{p}_1}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial \underline{v}_1}{\partial t}$

$-ik \underline{p}_1 = -\mu_0 i\omega \underline{v}_1$

d'où $\underline{v}_1 = \underline{p}_1 \frac{k}{\omega} \frac{1}{\mu_0}$ d'où $\underline{v}_1^* = \underline{p}_1^* \frac{k^*}{\omega \mu_0}$

$\langle e_c\rangle_t = \frac{\mu_0}{2} \langle v_1 v_1\rangle_t = \frac{\mu_0}{2}\frac{1}{2} Re(\underline{v}_1 \underline{v}_1^*)$

$= \frac{\cancel{\mu_0}}{4} Re(\underline{p}_1 \frac{k}{\omega \cancel{\mu_0}} \underline{p}_1^* \frac{k^*}{\omega \mu_0})$

$= \frac{1}{4\omega^2 \mu_0} Re(|\underline{p}_1|^2 |k|^2)$ avec $|k|^2 = k'^2 + \frac{1}{\delta^2}$

$|k|^2 = \frac{\omega^2 - 4\cancel{\alpha^2}}{c^2} + \frac{\cancel{\alpha^2}}{4} = \frac{\omega^2}{c^2}$

$\langle e_c\rangle_t = \frac{1}{4\omega^2\mu_0} |\underline{p}_1|^2 |k|^2 = \frac{P_m^2 \omega^2}{c^2 4\omega^2 \mu_0} \exp(-\frac{2x}{\delta}) = \frac{\chi_s}{4} P_m^2 \exp(-\frac{2x}{\delta})$

$\langle e_c\rangle_t = \langle e_p\rangle_t$ équipartition

d'où $\boxed{\langle e\rangle_t = 2\langle e_p\rangle_t = \frac{\chi_s}{2} P_m^2 \exp(-\frac{2x}{\delta})}$ ↘

$\langle \delta\mathcal{E}\rangle = \langle e\rangle_t d\tau = \langle e\rangle_t S(x) dx$ avec $S(x) = S_0 \exp(\alpha x) = S_0 \exp(\frac{2x}{\delta})$

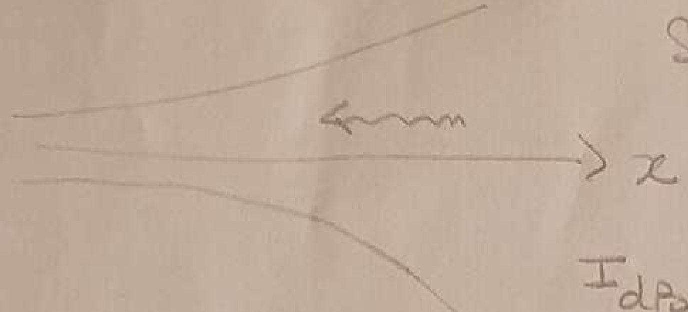
$\langle \delta\mathcal{E}\rangle = \frac{\chi_s}{2} P_m^2 S_0 dx$

$\boxed{\frac{\langle \delta\mathcal{E}\rangle}{dx} = \frac{\chi_s}{2} P_m^2 S_0 = cste/x}$ La densité linéique d'énergie acoustique moyenne est constante le long du tuyau

L'intensité sonore ↘ si x ↗

↘

<u>Rq</u> :



$S(x) = S_0 \exp(\sigma x)$

avec $\delta = \frac{1}{\sigma}$

$I_{dB_S}(x) \nearrow$ si $x \searrow$

Si l'onde se propage ds le sens des $x \searrow$ alors

$$v_1(x,t) = A \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos(\omega t + k' x)$$

$\nearrow$ si $x \searrow$

L'onde est <u>amplifiée</u> dans le sens de propagation

. C'est le principe du cornet acoustique = entonnoir qui recueille les ondes sonores et les conduit au tympan de l'oreille en les amplifiant.

⇒ Amélioration de l'audition des personnes présentant une déficience auditive.