Influence de la viscosité sur la propagation du son

1

1) (1) $\mu_0 \dfrac{\partial \underline{v}_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial \underline{p}_1}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial^2 \underline{v}_1}{\partial x^2}$

$\mu_0 j\omega \underline{v}_1 = +jk\underline{p}_1 + \eta(-jk)^2 \underline{v}_1$

$(\mu_0 j\omega + \eta k^2)\underline{v}_1 = jk\underline{p}_1$

Or (2) : $j\omega \underline{p}_1 = -\mu_0 c^2 (-jk)\underline{v}_1$

$\underline{p}_1 = \dfrac{\mu_0 c^2 k}{\omega} \underline{v}_1$

d'où $(\mu_0 j\omega + \eta k^2)\underline{v}_1 = jk^2 \dfrac{\mu_0 c^2}{\omega}\underline{v}_1$

$\mu_0 j\omega = k^2\left(j\dfrac{\mu_0 c^2}{\omega} - \eta\right)$

$k^2 = \dfrac{\mu_0 j\omega}{j\dfrac{\mu_0 c^2}{\omega} - \eta} = \dfrac{\mu_0 j\omega^2}{j\mu_0 c^2 - \eta\omega} = \dfrac{\omega^2}{c^2}\dfrac{j\mu_0}{j\mu_0 - \dfrac{\eta\omega}{c^2}}$

$k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\dfrac{1}{1 - \dfrac{\eta\omega}{j\mu_0 c^2}}$ or $\dfrac{1}{j} = -j$

Relation de dispersion :

(E.D) $\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \dfrac{j\eta\omega}{\mu_0 c^2}\right)^{-1}}$

Autre façon pour trouver (E.D) : on établit l'éq de propagation :

$\dfrac{\partial^2 \underline{v}_1}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \underline{v}_1}{\partial t^2} - \eta \chi_S \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^2 \underline{v}_1}{\partial x^2}\right)$

Puis on considère :

$\underline{v}_1 = \underline{A}\exp(j\omega t - jkx)$

$\left(c^2 = \dfrac{1}{\mu_0 \chi_S}\right)$

2) $\dfrac{\eta\omega}{\mu_0 c^2} = \dfrac{\eta 2\pi f}{\mu_0 c^2}$ le domaine audible est $20\,Hz < f < 20\,kHz$

or $f \sim$ qq $100\,Hz$; $\mu_0 = 1{,}3\,kg\cdot m^{-3}$ et $c = 340\,m\cdot s^{-1}$.

$\dfrac{\eta 2\pi f}{\mu_0 c^2} < \dfrac{10^{-5}\times 2\pi \times 20\,10^3}{1{,}3\times(3\times 10^2)^2} = \dfrac{4\pi\, 10^{-5+4-4}}{1{,}3\times 9} = 4\pi\,10^{-6} \approx 10^{-5}$

$\boxed{\dfrac{\eta\omega}{\mu_0 c^2} < 10^{-5}}$

d'où un dl à l'ordre 1 en $\varepsilon = \frac{\eta\omega}{\mu_0 c^2}$;

$$k = \frac{\omega}{c}\left(1 + j\frac{\eta\omega}{\mu_0 c^2}\right)^{-1/2}$$

$$k \simeq \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{j\eta\omega}{2\mu_0 c^2}\right)$$

$k = k' + jk''$ avec $k' = \frac{\omega}{c}$ et $k'' = -\frac{\eta\omega^2}{2\mu_0 c^3}$

$\Rightarrow \underline{v}_1(x;t) = A\, e^{j\omega t - jk'x + k''x}$

$v_1(x;t) = A e^{k''x} \cos(\omega t - k'x)$

La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = c$ indépendant de $\omega \Rightarrow$ le milieu est non dispersif.

C'est une onde progressive atténuée car $e^{k''x} \to 0$ selon $+\vec{u}_x$.

Soit $\boxed{\delta = \frac{1}{|k''|} = \frac{2\mu_0 c^3}{\eta\omega^2}}$ est la distance caractéristique

A.N : $\delta \simeq \frac{2 \cdot 1{,}3 \times (3{,}4 \cdot 10^2)^3}{10^{-5} \times 4\pi^2 \times (20 \cdot 10^3)^2}$ à $f = 20\,\mathrm{kHz}$
m

$$\delta = \frac{2 \times 1{,}3 \times (3{,}4)^3}{4\pi^2 \times 4} \times 10^{6+5-8}$$

$$\delta = 0{,}65 \cdot 10^3$$

$\boxed{\delta = 6{,}5 \cdot 10^2\ \mathrm{m}\,!}$ L'absorption est très faible et ne peut pas expliquer l'observation qui est plutôt due au fait que l'onde émise est sphérique, donc d'amplitude proportionnelle à $1/r$.