Modèle de clarinette

1) le musicien injecte l'air en $x=0$. On peut considérer que la anche se referme sur le bec.
En $x=\ell$, tout se passe comme si le tuyau de section S était raccordé à un tuyau de section $S' \to +\infty$.
Or le coefficient de réflexion en amplitude est :

$$r_v = \frac{\frac{Z'_a}{S} - \frac{Z''_a}{S'}}{\frac{Z'_a}{S} + \frac{Z''_a}{S''}} = -r_p$$

CAL1 : $p_1(x=\ell^-,t) = p_1(x=\ell^+,t)$
CAL2 : continuité du débit volumique :
$S v_1(x=\ell^-,t) = S' v_1(x=\ell^+,t)$

$x=\ell$ est un dioptre air/air
donc $Z'_a = Z''_a$
le coefficient de réflexion en puissance est : $R = r_v^2 = r_p^2 = \left(\frac{S'-S}{S'+S}\right)^2$
or $S' \gg S$ d'où $R \to 1$: réflexion totale en $x=\ell$
or $1 = R+T$ d'où $T \to 0$: absence d'onde transmise en $x=\ell$

Conclusion : l'onde stationnaire dans le tuyau résulte de la réflexion totale en $x=\ell$ et en $x=0$

2) $p(x,t) = P_M \cos(\omega t)\cos(kx)$ avec $k=\frac{\omega}{c}$ car milieu non dispersif et non absorbant (éqt de d'Alembert)

$$p(x,t) = \underbrace{\frac{P_M}{2}\cos(\omega t + kx)}_{OPPH^-} + \underbrace{\frac{P_M}{2}\cos(\omega t - kx)}_{OPPH^+}$$

on applique $p_+ = +Z v_+$ à l'OPPH+ et $p_- = -Z v_-$ à l'OPPH−
! $p = Z v$ ne peut pas s'appliquer à l'onde résultante (stationnaire)

d'où $v(x,t) = -\frac{P_M}{2Z}\cos(\omega t + kx) + \frac{P_M}{2Z}\cos(\omega t - kx)$

avec $Z = \mu_0 c$ et $c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$

$$v(x,t) = -\frac{P_M}{2Z}\left[\cos(\omega t + kx) - \cos(\omega t - kx)\right]$$

$$\boxed{v(x,t) = \frac{P_M}{Z}\sin(\omega t)\sin(kx)}$$

Onde stationnaire $v(x,t)$ en quadrature spatiale et temporelle / $p(x,t)$

3) les conditions aux limites sont :
CAL1 $\forall t$ $v(x=0,t)=0$ car obstacle imperméable fixe en $x=0$.
CAL2 $\forall t$ $p(x=\ell,t) + P_0 = P_0$ Continuité de la pression découle du PFD à interface $x=\ell$ de masse nulle
d'où $p(x=\ell,t) = 0$ $\forall t$

$p(x=\ell,t) = \frac{P_M}{\mu_0 c} \cos(\omega t)\cos(k\ell) = 0 \ \forall t$ avec $\frac{P_M}{\mu_0 c} \neq 0$

d'où $\cos(k\ell) = 0$

$k\ell = \omega\frac{\ell}{c} = \frac{\pi}{2} [\pi] = (2p+1)\frac{\pi}{2}$ on pose $n = 2p+1$

les modes propres sont :

si $p=0$ $\omega_1 = \frac{1}{2}\frac{\pi c}{\ell} = 2\pi f_1$ d'où $n=1$ $f_{1c} = \frac{c}{4\ell}$

si $p=1$ $\omega_3 = \frac{3}{2}\frac{\pi c}{\ell} = 2\pi f_1$ $n=3$ $f_{3c} = 3f_1$ harmoniques

si $p=2$ $\omega_5 = \frac{5\pi c}{2\ell} = 2\pi f_1$ $n=5$ $f_{5c} = 5f_1$ de rangs impairs.

Pour une flûte (tuyau ouvert - ouvert) : $f_{1f} = \frac{c}{2\ell}$

d'où $\boxed{f_{1c} = \frac{f_{1f}}{2}}$ Une clarinette joue à une octave inférieure (la hauteur du son représente le fondamental)

le son d'une clarinette est plus grave qu'une flûte.

4) Le trou ouvert impose la CAL $p(x=\frac{\ell}{2},t) = 0$.

Tout se passe comme si la longueur devenait $\frac{\ell}{2} = \ell_{eff}$ avec $\ell = 0,65$ m

La note jouée est $f_1 = \frac{c}{4\ell_{eff}} = \frac{c}{2\ell}$ avec $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,314 \times 293}{29 \times 10^{-3}}}$

$\boxed{f_1 = 264 Hz}$