

Traitement des fumées industrielles par un électrofiltre.

I) Champ électrique dans un électrofiltre:

A) Champ électrique à vide et tension seuil! (MF):

1) L'équation de Poisson s'écrit: $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ car $\vec{E} = -\text{grad } V$ en régime stationnaire et $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (MG).
 où ρ est la densité volumique de charge.
 Dans un espace vide de charge: $\rho = 0$

Donc $\Delta V = 0$ ou Δ désigne l'opérateur Laplacien.

2) Electrofiltre humide:

a) L'électrofiltre humide présente une symétrie cylindrique;

$$V = V(r)$$

Car l'électrofiltre est invariant par rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz) et par translation le long de (Oz) . Donc V ne dépend ni de θ ni de z .
 car les effets de bord sont négligés (cylindre infiniment long).

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) \text{ car } V = V(r)$$

$$\Delta V = 0 \text{ soit } \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \text{ car } \frac{1}{r} \neq 0 \text{ en M quelconque}$$

Intégrons 1 fois par rapport à r :

$$r \frac{dV}{dr} = A$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r}$$

$$\text{Donc } V(r) = A \ln r + B.$$

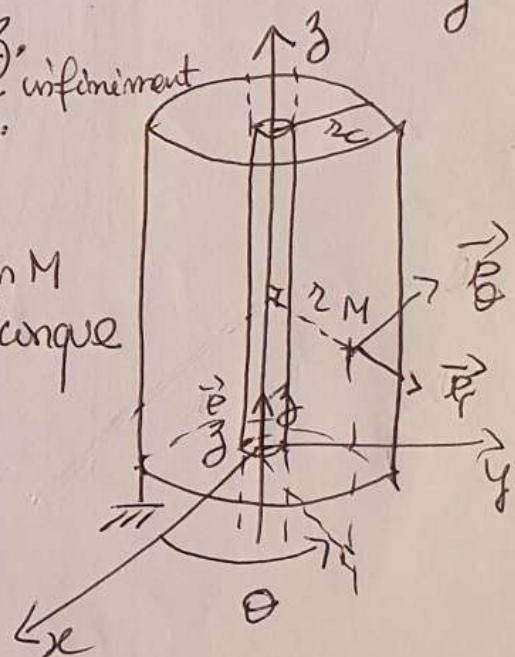
les conditions aux limites sont:

$$V(r_c) = 0 = A \ln r_c + B \text{ d'où } B = -A \ln r_c$$

$$\text{et } V(r_e) = -U = A \ln r_e + B$$

$$\text{d'où } A \ln r_e = -U + A \ln r_c$$

$$A \ln \frac{r_e}{r_c} = -U \text{ soit } A = -\frac{U}{\ln(r_e/r_c)}$$



Zones de
champ $\vec{E}$ fort
(lignes de champ
qui se resserrent),

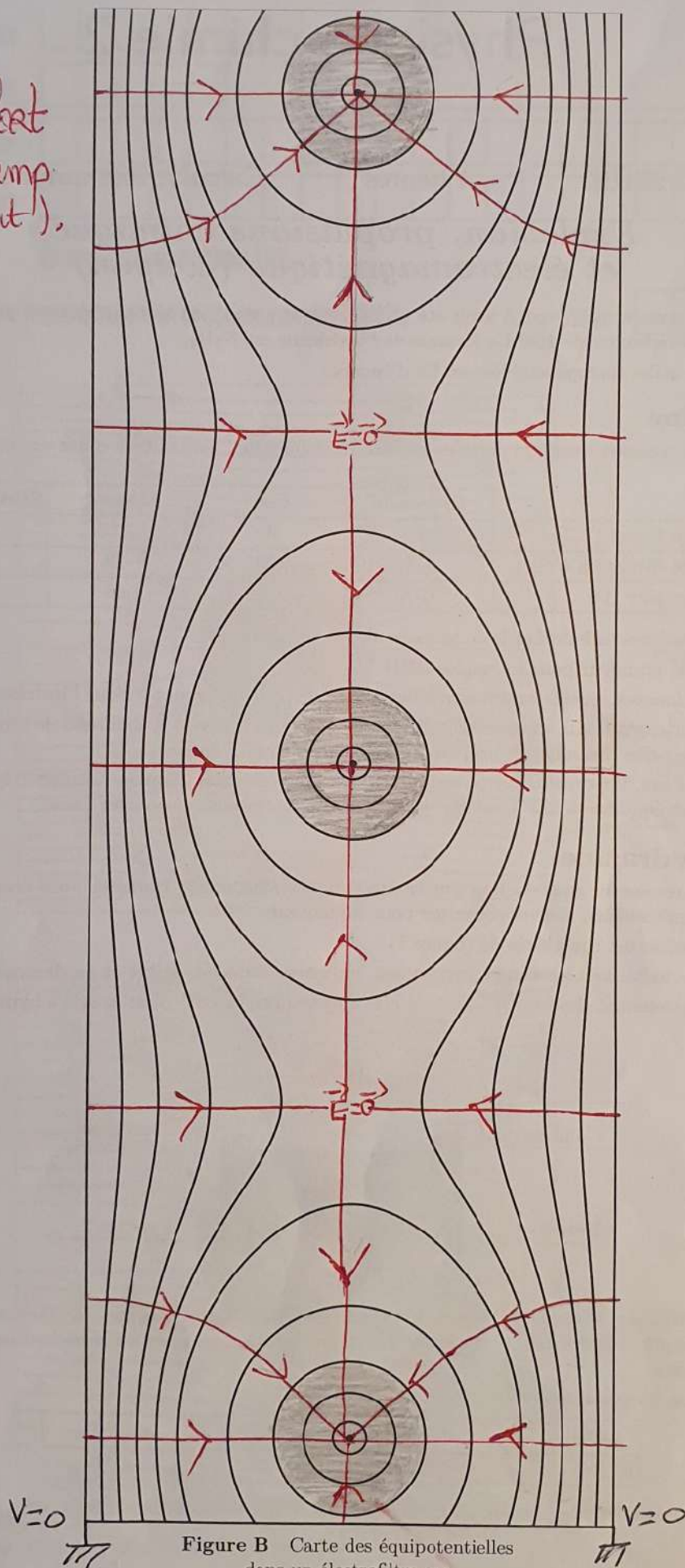
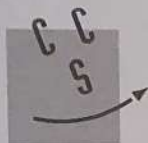


Figure B Carte des équipotielles
dans un électrofiltre sec



Numéro de place

Numéro d'inscription

--	--	--	--	--

Signature

Signature _____

Norm

[illegible]

Prénom

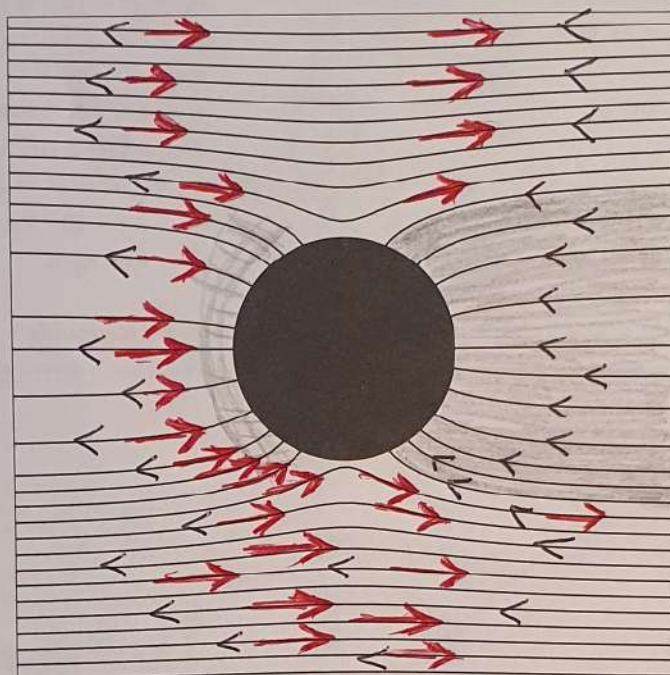
[illegible]

Épreuve : Physique-chimie 1 PSI

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille

--	--	--	--



Pas d'anions
là où les lignes
de champ pénètrent
dans la sphère.

→ : sens de déplacement des anions

← E^+ →

zone d'ou
partent
des lignes
de champ

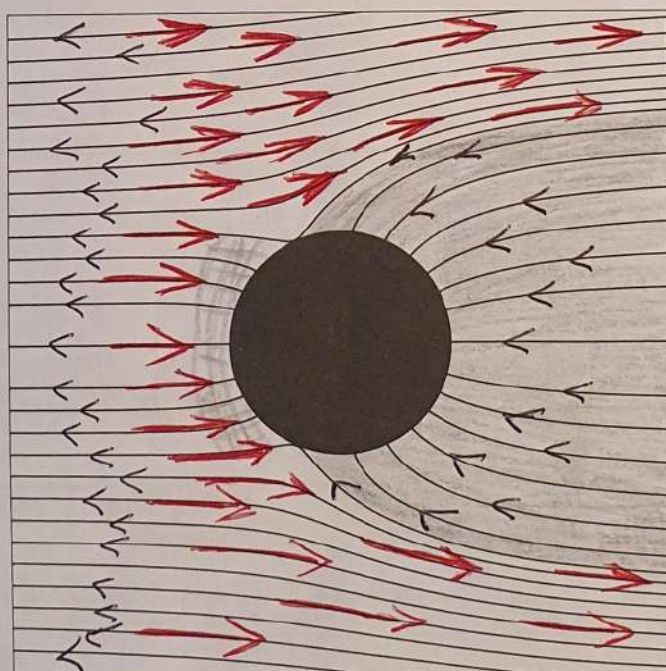


Figure A Lignes de champ autour d'un grain de poussière pour $Q = 0$ (en haut) et pour $Q < 0$ (en bas)

d'où $V(r) = A (\ln r - \ln r_c)$

$$V(r) = + \frac{U}{\ln\left(\frac{r_c}{r_e}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_e}\right) \quad \text{avec } \ln \frac{r_e}{r_c} = -\ln \frac{r_c}{r_e} < 0$$

car $r_c > r_e$

b) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ en régime stationnaire
 $\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$

$$\vec{E} = - \frac{U}{\ln \frac{r_c}{r_e}} \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

U_0 est tel que $E_0 = + \frac{1 U_0}{r_e \ln \frac{r_c}{r_e}}$ de sorte que $\vec{E}_0 = -E_0 \vec{e}_r$
 car $E_0 > 0$
 $\vec{E}$ descend les V .

d'où $U_0 = r_e E_0 \ln \frac{r_c}{r_e}$

c) A.N! $U_0 = 1,25 \times 10^{-3} \times 4,4 \times 10^6 \ln \frac{150}{1,25}$

$$U_0 = 26 \text{ kV}$$

Il y a ionisation en $r = r_e$ si $E(r=r_e) \gg E_0$ soit $U \gg U_0$

3) Electrofilte sec!

a) $V(x; y = \pm r_e; z) = 0$ est validée sur les collectrices

$V(x; y; z)$ est bien indépendant de z conformément à l'invariance par translation selon (Oz) .

$V(-x; y; z) = V(x; y; z)$ est validée

$V(x, y = \pm r_e; z) = -U$

et en particulier en $x=0$ soit

$$V(x=0, y = \pm r_e; z) = -U$$

$$V(x = \pm r_e; y = 0; z) = -U$$

$$+1 = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln \left(\cosh \left(\pi \frac{2md}{2s} \right) - \cos \frac{\pi r_e}{2s} \right)$$

soit $\rightarrow$

$$\left(\cosh \left(\pi \frac{2md}{2s} \right) + \cos \frac{\pi r_e}{2s} \right)$$

$$\text{d'où } \Lambda = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln \left(\frac{\cosh\left(\pi \left(\frac{\pm z_e - 2md}{2s}\right)\right) - 1}{\cosh\left(\pi \left(\frac{\pm z_e - 2md}{2s}\right)\right) + 1} \right) \quad (3)$$

Poseons $X = \pi \left(\frac{\pm z_e - 2md}{2s} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{\cosh X - 1}{\cosh X + 1} &= \frac{e^X + e^{-X} - 2}{e^X + e^{-X} + 2} = \frac{(1 + e^{-2X} - 2e^{-X})e^X}{(1 + e^{-2X} + 2e^{-X})e^X} \\ &= \frac{(1 - e^{-X})^2}{(1 + e^{-X})^2} = \left(\frac{e^{+X/2} - e^{-X/2}}{e^{X/2} + e^{-X/2}} \right)^2 \left(\frac{e^{-X/2}}{e^{-X/2}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\text{th}(X/2)}{\text{ch}(X/2)} \right)^2 = \text{th}^2 \left(\frac{X}{2} \right) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\Lambda = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2 \ln \left(\text{th} \left(\frac{\pi(z_e - 2md)}{4s} \right) \right)$$

b) Voir document - Réponse !

• les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentielles et descendent les potentiels : $\vec{E}$ est donc orienté des collectrices vers les électrodes émitrices (car $V > 0$).

• sur l'axe (Ox) en $x = d + m2d$ $\vec{E} = \vec{0}$ car tangent à 2 lignes de champ orthogonales.

• Le voisinage de chaque émittrice est une zone de champ fort car les lignes de champ se resserrent.

c) $\left| \frac{E_y(x=0; y=z_e)}{U/s} \right| = 24$ d'après le graphe de la figure 2.

Il y a ionisation si $|E_y(x=0; y=z_e)| > E_0$

soit $24 \frac{U}{s} > E_0$

$U > \frac{E_0 s}{24}$

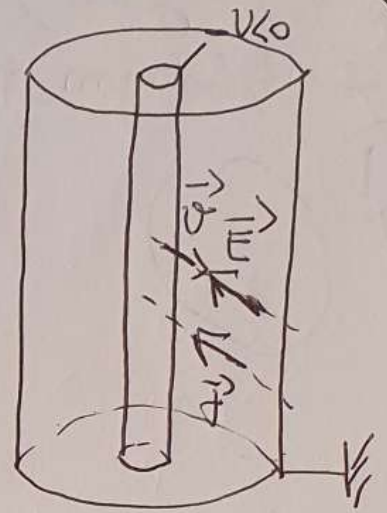
Il y a ionisation si $U > U_0$ avec $U_0 = \frac{E_0 s}{24}$

A.N : $U_0 = 4,4 \times 10^6 \times 150 \times 10^{-3}$

$U_0 = 275 \text{ kV}$ même ordre qu'avec l'électrofilte humide.

B) Influence des charges d'espace:

- 1) les anions A sont émis au voisinage de l'émittrice par ionisation du gaz.
 les anions se déplacent de l'émittrice vers la collectrice à $\vec{v} = -b\vec{E}$;
 $\vec{v}$ est opposé à $\vec{E}$ ($b > 0$)



$$\vec{j} = \rho \vec{v} = -\rho b \vec{E}$$

$$j \vec{e}_r = -\rho b E \vec{e}_r \quad \text{d'où} \quad \boxed{j = -\rho b E}$$

le sens du courant $i > 0$ est le sens de circulation des charges positives donc de la collectrice vers l'émittrice: $j < 0$

$$2) \quad i = \iint_{(S_{\text{lat}})} j \vec{e}_r \cdot d\vec{S} (-\vec{e}_r) = -j \iint_{(S_{\text{lat}})} dS = -j 2\pi r h$$

$$\text{OR } j = -\rho b E$$

$$\text{d'où } i = \rho b E 2\pi r h \quad \text{soit} \quad \boxed{\rho = \frac{i}{2\pi r h b E}}$$

- 3) le lien entre le champ $\vec{E}$ et les charges ρ qui le créent est l'équation de Maxwell - Gauss:

$$\boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

$$\text{soit } \frac{1}{r} \frac{d(rE)}{dr} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{i}{2\pi r h b E}$$

Multiplions par r^2 ;

$$r \frac{d(rE)}{dr} = \frac{i r}{2\pi \epsilon_0 h b E}$$

$$\text{soit } \boxed{rE \frac{d(rE)}{dr} = \frac{i r}{2\pi \epsilon_0 h b}}$$

$$4) (rE) \frac{d(rE)}{dr} = \frac{d(r^2 E^2 / 2)}{dr}$$

5

On a donc :

$$\frac{d(r^2 E^2 / 2)}{dr} = \frac{i r}{2\pi \epsilon_0 h b}$$

Intégrons 1 fois / r :

$$\frac{r^2 E^2}{2} = \frac{i r^2}{4\pi \epsilon_0 h b} + A$$

$$r^2 E^2 = \frac{i}{2\pi \epsilon_0 h b} r^2 + 2A$$

$$\text{or } r_0^2 E_0^2 = \frac{i}{2\pi \epsilon_0 h b} r_0^2 + 2A \quad \text{car } E(r=r_0) = E_0$$

$$\text{donc } r^2 E^2 - r_0^2 E_0^2 = \frac{i}{2\pi \epsilon_0 h b} (r^2 - r_0^2)$$

$$r^2 E^2 = r_0^2 E_0^2 + \frac{i}{2\pi \epsilon_0 h b} (r^2 - r_0^2)$$

$$E^2 = \frac{r_0^2 E_0^2}{r^2} + \frac{i}{2\pi \epsilon_0 h b} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)$$

$$E(r) = - \sqrt{\left(\frac{r_0 E_0}{r}\right)^2 + \frac{i}{2\pi \epsilon_0 h b} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)} \quad \text{car } E(r) < 0$$

$$5) \text{ si } r \gg r_0 \text{ alors } E \approx - \sqrt{\frac{i}{2\pi \epsilon_0 h b}}$$

$$\text{A.N: } E = - \sqrt{\frac{0,70 \times 10^{-3}}{2\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 3,1 \times 10^{-4}}}$$

$$E = -0,20 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$6) \vec{v} = -b \vec{E} = -b E \vec{e}_r = v \vec{e}_r$$

avec $v = -bE$

$$v = 3,1 \times 10^{-4} \times 0,2 \times 10^6$$

$$\boxed{v = 62 \text{ m.s}^{-1}}$$

$$\rho = \frac{i}{h} \frac{1}{2\pi b E} \quad \text{A.N!} \quad \rho = \frac{-0,70 \times 10^{-3}}{2\pi 150 \times 10^{-3} \times 62}$$

$$\boxed{\rho = -1,2 \times 10^{-5} \text{ C.m}^{-3}}$$

→ au voisinage de la collecte $z \approx z_c$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{-e} &= 7,4 \times 10^{19-6} = 7,4 \times 10^{13} \text{ ions.m}^{-3} \\ &= 7,4 \times 10^{13} \text{ ions} \cdot (10^2 \text{ cm})^{-3} \\ &= 7,4 \times 10^{13-6} \text{ ions.cm}^{-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\rho}{-e} = 7,4 \times 10^7 \text{ ions.cm}^{-3}}$$

II) Comportement des poussières dans l'électrofiltre:

A) Charge d'une particule sphérique: modèle de Pauthenier

1) a) Voir document - réponse.

$$b) \boxed{\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r}$$

D'après le théorème de Gauss appliqué à l'extérieur du grain de poussière qui présente une symétrie sphérique.

Donc le grain est équivalent à une charge ponctuelle Q placée en son centre.

D'après la figure A, si $|Q|$ croît alors la portion d'air partant les lignes de champ ($\#$) diminue s'opposant ainsi à l'arrivée de nouveaux anions sur la sphère.

c) Quand $Q = Q_{\text{lim}}$: $\vec{E}_t(\theta=\pi, r=a) = \vec{0}$

$$E\vec{u}_z + E\left(\frac{\epsilon_2-1}{\epsilon_2+2}\right)(-2\vec{u}_r) + \frac{Q_{\text{lim}}}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_r = \vec{0}$$

$$\text{or } \vec{u}_r(\theta=\pi) = -\vec{u}_z$$

$$E\left(1 + \frac{2(\epsilon_2-1)}{\epsilon_2+2}\right) = \frac{Q_{\text{lim}}}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

d'où

$$Q_{\text{lim}} = 4\pi\epsilon_0 a^2 E \left[1 + 2\left(\frac{\epsilon_2-1}{\epsilon_2+2}\right) \right]$$

d) AN: $Q_{\text{lim}} = 4\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times (1,0 \times 10^{-6})^2 \times 5,0 \times 10^5 \left[1 + 2\left(\frac{10-1}{10+2}\right) \right]$

$$Q_{\text{lim}} = 1,4 \times 10^{-16} \text{ C}$$

$$\frac{Q_{\text{lim}}}{-e} = 0,87 \times 10^3 \text{ charges élémentaires}$$

2) a) D'après le théorème de Gauss : $\dim(\epsilon_0) = \frac{Q}{L^2 \dim(E)}$

or $\vec{v} = -b\vec{E}$ d'où $\dim(E) = \frac{L T^{-1}}{\dim(b)}$

d'où $\dim(\epsilon_0) = \frac{Q T \dim(b)}{L^3}$

or $\frac{Q}{L^3} = \dim(|e|)$

d'où $\tau = \dim\left(\frac{\epsilon_0}{|e| b}\right) = \dim(\tau_Q)$

Prenons donc $\tau_Q = \frac{4\epsilon_0}{|e| b}$

b) $Q(t=t_{90}) = 0,90 Q_{\text{lim}}$ soit $0,90 = \frac{1}{1 + \frac{\tau_Q}{t_{90}}} = \frac{9}{10}$

d'où $1 + \frac{\tau_Q}{t_{90}} = \frac{10}{9}$

$$\frac{\tau_Q}{t_{g0}} = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9} \quad \text{soit}$$

$$t_{g0} = 9\tau_Q = \frac{36\varepsilon}{1\rho 1b}$$

A.N: $t_{g0} = \frac{36 \times 885 \times 10^{-12}}{5,0 \times 10^{-5} \times 3,1 \times 10^{-4}}$

$$t_{g0} = 21 \text{ ms}$$

c) le temps de séjour dans le filtre pour un grain de poussière est: $\Delta t = \frac{L}{u_0} = \frac{10}{1} = 10 \text{ s}$.

$\Delta t \gg t_{g0}$ et donc les poussières atteignent quasi instantanément leur charge limite.
le régime transitoire est négligeable.

B) Migration des particules:

- Système: un grain de poussière de masse m et de charge Q
- Référentiel lié à la fumée, galiléen car en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel du laboratoire lui-même galiléen.
- Bilan des forces:
 - la force électrique $Q\vec{E} = QE\vec{e}_y$
 - la traînée de Stokes $-6\pi\eta a\vec{w}$

D'après le théorème de la quantité de mouvement:

$$m \frac{d\vec{w}}{dt} = QE\vec{e}_y - 6\pi\eta a\vec{w}$$

La vitesse limite $\vec{w}_{\lim}$ n'est atteinte que si on tient compte de la traînée et en régime permanent: $\frac{d\vec{w}}{dt} = 0$

d'où $\vec{w}_{\lim} = \frac{QE}{6\pi\eta a} \vec{e}_y$

A.N: $w_{\lim} = \frac{1,4 \times 10^{-16} \times 5,0 \times 10^5}{6\pi \times 1,0 \times 10^{-6} \times 2,4 \times 10^{-5}}$
 $w_{\lim} = 0,15 \text{ m.s}^{-1}$

La formule de la traînée de Stokes est validée si le nombre de Reynolds Re est: $Re \ll 1$ soit en régime laminaire.

OR, $Re = \frac{w_{\lim} 2a}{\eta} = \frac{w_{\lim} 2a \rho a}{\eta a} = \frac{0,15 \times 2,0 \times 10^{-6} \times 984}{34 \times 10^{-5}}$
 $Re = 10^{-2}$

Rq: la formule générale de la traînée est:

$$\|\vec{T}\| = \frac{1}{2} \rho_a C_x S w^2 \quad \text{avec } S = \pi a^2 \text{ pour une sphère}$$

or $C_x = \frac{24}{Re}$ pour un écoulement laminaire $Re = 10^{-2} \ll 1$

d'ail $\|\vec{T}\| = \frac{1}{2} \rho_a \frac{24}{Re} \frac{\pi a^2}{w} w^2 = 6\pi \eta_a a w$ Formule de Stokes.

le temps caractéristique est: $\tau = \frac{m}{6\pi \eta_a a} = \frac{4}{3} \frac{\pi a^3 \mu}{6\pi \eta_a a}$

$$\tau = \frac{2}{9} \frac{\mu a^2}{\eta_a}$$

A.N: $\tau = \frac{2}{9} \times \frac{3,6 \times 10^3 \times (10 \times 10^{-6})^2}{2,4 \times 10^{-5}}$

$$\tau = 24 \mu s$$

La vitesse limite w_{lim} est atteinte en quelques τ .

c) Rendement de l'électrofiltre:

1) La fumée s'écoule dans l'air à la vitesse u_0 dans un tuyau de diamètre s : $Re = \frac{u_0 s \rho_a}{\eta_a}$ avec $s = 150 \text{ mm}$

$$Re = \frac{1 \times 2 \times 0,150 \times 984}{2,4 \times 10^{-5}}$$

$$Re = 10^4 \gg 1 \quad \text{l'écoulement de la fumée est turbulent.}$$

2) a) $N(t) = N_{commun}(t) + C(x) A u_0 dt$ zone claire à gauche

$N(t+dt) = N_{commun}(t+dt) + C(x+\Delta x) A u_0 dt$ zone claire à droite

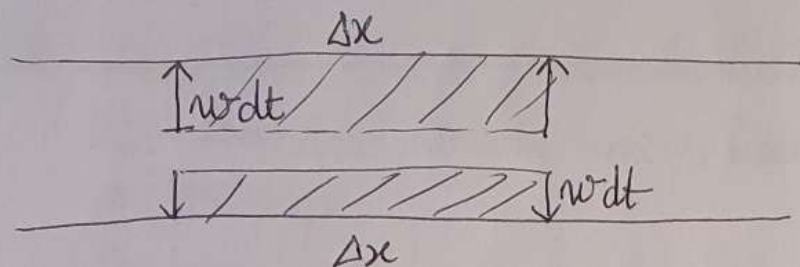
or $N_{commun}(t) = N_{commun}(t+dt)$ en régime stationnaire

↳ zone sombre (système ouvert = surface de contrôle fixe)

or $dN = N(t+dt) - N(t)$

$$dN = [C(x+\Delta x) - C(x)] A u_0 dt$$

b) les particules de Σ qui atteignent la surface collectrice pendant dt sont contenues dans les 2 cylindres tel que:



Le volume vaut : $2(w dt \Delta x h) = SV_{coll}$

le nombre de particules contenues dans SV_{coll} est : $c(x) SV_{coll}$

soit $\delta N_{col} = c(x) 2w dt \Delta x h$

$$\boxed{\delta N_{col} = c(x) w P \Delta x dt}$$

c) le bilan de particules s'écrit :

$$dN = -\delta N_{col} \quad \text{car } dN < 0$$

$$\underbrace{C(x+\Delta x) - C(x)}_{\substack{\downarrow \text{développement de Taylor} \\ \frac{dc}{dx} \Delta x}} = -C(x) \frac{wP}{Au_0} \Delta x \frac{dt}{dt}$$

$$\frac{dc}{dx} \Delta x + C(x) \frac{wP}{Au_0} \Delta x = 0$$

$$\boxed{\frac{dc}{dx} = -\frac{wP}{Au_0} c}$$

d) Posons $\delta = \frac{Au_0}{wP}$ distance caractéristique.

$$\frac{dc}{dx} + \frac{c}{\delta} = 0 \quad \text{la solution est : } c(x) = c_1 e^{-x/\delta}$$

car $C(x=0) = c_1$

D'où $c_2 = c_1 e^{-L/\delta}$

$$\frac{c_2}{c_1} = e^{-L/\delta}$$

or $\eta = 1 - \frac{c_2}{c_1}$

d'où $\boxed{\eta = 1 - e^{-L/\delta}}$

A.N : $\delta = \frac{Au_0}{w} = \frac{0,150 \times 1}{9,150} = 1 \text{ m}$

$\eta = 1 - e^{-10/1}$

$$\boxed{\eta \approx 1}$$

3) a) A l'échelle des particules, l'air ne peut plus être considéré comme un milieu continu à l'échelle mésoscopique.

b) On imagine qu'une fumée industrielle est constituée d'une diversité de particules de diamètres différents, contrairement à une fumée de laboratoire où ce diamètre est unique et contrôlé lors de la préparation de la fumée.

Dans le cas industriel, w n'est donc pas unique. d'après la figure 5.

le modèle de Deutsch est donc moins adapté.

c) si $k=1$ alors $\eta = 1 - \exp\left(-\frac{w'A_c}{D_v}\right)$

or $\eta_{\text{Deutsch}} = 1 - \exp\left(-\frac{wL}{\Delta u_0}\right)$

or $D_v = u_0 L 2h$

d'où $\eta_{\text{Deutsch}} = 1 - \exp\left(-\frac{wL 2h}{D_v}\right)$

or $L 2h = A_c$

d'où $\eta_{\text{Deutsch}} = 1 - \exp\left(-\frac{wA_c}{D_v}\right)$

$\eta = \eta_{\text{Deutsch}} \text{ avec } w = w'$

d) $\frac{A_c}{D_v} = \frac{L}{\Delta u_0} = \frac{10}{0,150 \times 1}$

$\eta = 1 - \exp\left(-\frac{w'A_c}{D_v}\right)^{0,5}$ avec $w' = 0,12 \text{ m.s}^{-1}$

$\eta = 1 - \exp\left(-\frac{0,12 \times 10}{0,150}\right)^{0,5}$

$\eta = 94\%$

FIN