

Devoir maison 1 : à rendre le jeudi 17 septembre 2020

Exercice

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det(A)$
2. On pose $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1, 1)$ et $u_4 = (-1, 0, 0, 1)$, à l'aide d'un déterminant, montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
4. En déduire un nouveau calcul de $\det(A)$, est-ce bien le même que précédemment ?

Problème

Dans ce devoir, on note $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n . Notons K l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle et $L = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad C = AB - BA\}$.

Préliminaires

1. Démontrer que K est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $\dim(K)$.
2. Montrer que L est inclus dans K .
3. Justifier que K et $\text{vect}(I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. **Question facultative** : déterminer une base de K .

Étude d'un exemple en dimension 2.

Dans cette partie **seulement**, on prend $n = 2$.

5. Trouver $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ où s est la symétrie sur K parallèlement à $\text{vect}(I_2)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
6. Calculer $\det(A)$.
7. Donner une base de K .
8. En déduire $\mathcal{B}'$ une base adaptée à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = K \oplus \text{vect}(I_n)$.
9. Donner également $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(s)$. En déduire que la matrice A est semblable à une matrice diagonale. Puis calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Cas général

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que chaque droite de E est stable par f .

10. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
11. Montrer que f est une homothétie.
12. Par contraposée, montrer que si f n'est pas une homothétie alors il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x))$ soit libre.
13. Soient $M \in K \setminus \text{vect}(I_n)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que M soit la matrice de f dans une certaine base $\mathcal{B}$. En utilisant la question précédente, montrer que M est semblable à une matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & M' \end{pmatrix}$ où $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $M' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.
14. Montrer par récurrence sur n que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de trace nulle alors, M est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.
15. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que $\varphi: M \mapsto MD - DM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une base de $\text{Ker}(\varphi)$ et de $\text{Im}(\varphi)$.
16. **Question facultative** : montrer que $\text{Ker}(\varphi) = \mathbb{K}[D]$.
17. Montrer que $K \subset L$.