

Devoir maison 1 correction

Exercice

Corrigé sur Youtube : <https://youtu.be/mGQ2hGmh-8>

Problème

1. Considérons $\text{tr}: M \mapsto \text{tr}(M)$, c'est une forme linéaire non nulle (car $\text{tr}(I_n) = n \neq 0$), donc $K = \text{Ker}(\text{tr})$ est un hyperplan. Ainsi, $\dim(K) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - 1 = n^2 - 1$.
2. Soit $C \in L$. Il existe $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $C = AB - BA$. Comme tr est linéaire et que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

$$\text{tr}(C) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(AB) = 0$$

Ainsi, $C \in K$. Par conséquent, $L \subset K$.

3. Soit $M \in K \cap \text{vect}(I_n)$, alors $M \in K$ donc $\text{tr}(M) = 0$ et $M \in \text{vect}(I_n)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$. Par conséquent,

$$\text{tr}(M) = \lambda n = 0$$

Dès lors, $\lambda = 0$, et $M = 0I_n = 0$. Donc $K \cap I_n \subset \{0_n\}$, l'inclusion réciproque étant toujours vraie, on a $K \oplus \text{vect}(I_n)$. Or $\text{vect}(I_n)$ est un espace vectoriel admettant (I_n) comme famille génératrice, comme $I_n \neq 0_n$, (I_n) est libre. Donc $\dim(\text{vect}(I_n)) = 1$. Donc $\dim(K) + \dim(\text{vect}(I_n)) = n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Par conséquent, K et $\text{vect}(I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Remarquons que $M = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \\ (i,j) \neq (n,n)}} m_{i,j} E_{i,j}$ où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire possédant que des 0 sauf un 1 à la i -ième ligne et j -ième colonne. Alors

$$\begin{aligned} M \in K &\iff m_{n,n} = - \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i} \\ &\iff M = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \\ (i,j) \neq (n,n)}} m_{i,j} E_{i,j} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i} \right) E_{n,n} \\ &\iff M = \sum_{i \neq j} m_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i} (E_{i,i} - E_{n,n}) \\ &\iff M \in \text{vect}((E_{i,j})_{i \neq j} \cup (E_{i,i} - E_{n,n})_{1 \leq i \leq n-1}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{B}_K = (E_{i,j})_{i \neq j} \cup (E_{i,i} - E_{n,n})_{1 \leq i \leq n-1}$ est une famille génératrice de K . Remarquons que $\dim(K) = n^2 - 1$ et que $|\mathcal{B}_K| = n(n-1) + (n-1) = n^2 - 1$, donc $\mathcal{B}_K$ est une base de K .

Étude d'un exemple en dimension 2.

Dans cette partie **seulement**, on prend $n = 2$.

5. $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, d'après la question 3, il existe un unique couple $(A, B) \in K \times \text{vect}(I_2)$ tel que $M = A + B$. Comme $B \in \text{vect}(I_2)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = \lambda I_2$. Dès lors, $M = A + \lambda I_2$, par linéarité de la trace $\text{tr}(M) = \text{tr}(A) + \lambda \text{tr}(I_2) = 2\lambda$. Donc, $\lambda = \text{tr}(M)/2$. Dès lors,

$$B = \frac{\text{tr}(M)}{2} I_2 \quad \text{et} \quad A = M - \frac{\text{tr}(M)}{2} I_2$$

On obtient, alors $s(M) = A - B = M - \text{tr}(M)I_2$. Dès lors, $s(E_{1,1}) = E_{1,1} - I_2 = -E_{2,2}$, $s(E_{1,2}) = E_{1,2}$, $s(E_{2,1}) = E_{1,2}$

$$\text{et } s(E_{2,2}) = E_{2,2} - I_2 = -E_{1,1}. \text{ Par conséquent, } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Pas besoin d'analyse-synthèse ici, car on ne cherche pas à démontrer l'existence ou l'unicité de A et B . L'existence et l'unicité ont été établies à la question 3.

6. Comme le déterminant est antisymétrique et que le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments diagonaux :

$$\det(A)_{C_1 \leftrightarrow C_4} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

7. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in K &\iff \operatorname{tr}(M) = a + d = 0 \\ &\iff d = -b \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &\iff M = a(E_{1,1} - E_{2,2}) + bE_{1,2} + cE_{2,1} \\ &\iff M \in \operatorname{vect}(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1}) \end{aligned}$$

Par conséquent, $K = \operatorname{vect}(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$, ainsi $\mathcal{B}_K = (E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ est une famille génératrice de K , comme $|K| = 3 = \dim(K)$, on en conclut que $\mathcal{B}_K$ est une base de K ².

8. Comme (I_n) est une base de $\operatorname{vect}(I_n)$, par principe de concaténation de bases de deux sous-espaces supplémentaires, $\mathcal{B}' = (E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1}, I_n)$ est une base de $\mathcal{M}_2(K)$.
9. Notons que $(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1}) \in K^3$, ainsi $s(E_{1,1} - E_{2,2}) = E_{1,1} - E_{2,2}$, $s(E_{1,2}) = E_{1,2}$, $s(E_{2,1}) = E_{2,1}$. De plus, comme $I_n \in \operatorname{vect}(I_n)$, $s(I_n) = -I_n$. Donc,

$$B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Par la formule de changement de base, A est semblable à B une matrice diagonale. De plus, $A^2 = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s \circ s) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) = I_4$. Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(A^2)^q = I_4^q = I_4$, donc $A^{2q} = I_4$. En multipliant par A , $A^{2q+1} = A$. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = I_4$ si p est pair et $A^p = A$ si p est impair.

Cas général

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que chaque droite de E est stable par f .

10. Soit $x \in E$:
- Si $x = 0_E$, alors $f(x) = 0_E = 0 \times 0_E$, donc en posant $\lambda_0 = 0$, on a bien, $f(x) = \lambda_x x$ si $x = 0_E$.
 - Si $x \neq 0_E$, alors $D = \operatorname{vect}(x)$ est une droite, elle est donc stable, $f(D) \subset D$. Or $f(x) \in f(D)$, donc $f(x) \in D = \operatorname{vect}(x)$, cela veut dire qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
11. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$. Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_i + e_j) = c(e_i + e_j)$. De plus, comme f est linéaire,

$$f(e_i + e_j) = f(e_i) + f(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$$

Donc $(\lambda_i - c)e_i + (\lambda_j - c)e_j = 0_E$. Comme (e_i, e_j) est une famille libre, on en déduit que $\lambda_i - c = \lambda_j - c = 0$. Donc $\lambda_i = c = \lambda_j$, ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_i = \lambda_1$. Notons $\lambda = \lambda_1$. Nous avons ainsi prouvé que pour tout x vecteur de $\mathcal{B}$, $f(x) = \lambda \operatorname{Id}_E(x)$. Une application linéaire étant uniquement caractérisée par les images des vecteurs d'une base, on en déduit que $f = \lambda \operatorname{Id}_E$. Par conséquent, f est une homothétie.

12. Si f n'est pas une homothétie, on peut en déduire qu'il existe $x \in E$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq \lambda x$. Considérons un tel x et montrons que $(x, f(x))$ est libre. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, supposons $ax + bf(x) = 0_E$. Supposons que $b \neq 0$, alors $f(x) = \frac{-a}{b}x$ ce qui est absurde. Dès lors $b = 0$ et $ax = 0$. Or si $x = 0_E$, alors $f(x) = 0x$ ce qui est impossible. Donc $x \neq 0_E$ ce qui conduit à $a = 0$, la famille $(x, f(x))$ est libre.

2. Cette méthode est la même qu'à la question 4, à ceci près qu'ici c'est plus simple car moins d'indices à gérer.

13. Si f était une homothétie, alors M , la matrice de f dans une base, serait proportionnelle à I_n . Comme ce cas est exclus, on peut en déduire, par contraposée, que f n'est pas une homothétie. Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x))$ est libre. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $(e_3, e_4, \dots, e_n) \in E^{n-2}$ tel que $\mathcal{B}' = (x, f(x), e_3, e_4, \dots, e_n)$ soit une base de E . Alors,

$$f(x) = 0 \cdot x + 1 \cdot f(x) + 0 \cdot e_3 + \dots + 0e_n$$

Ainsi, en décomposant les images des vecteurs de $\mathcal{B}'$ par f dans la base $\mathcal{B}'$, on obtient $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline C & M' \end{array} \right)$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$, C une matrice colonne avec $n-1$ lignes qui ne contient que des 0 sauf un 1 en première position et $M' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

14. Posons $\mathcal{P}(n)$: «Tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle».
- Si $n = 1$, considérons $M = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ de trace nulle, alors $\text{tr}(M) = a = 0$, donc $M = (0)$ est semblable à elle-même (une matrice dont la diagonale est nulle). Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de trace nulle. Si $M \in \text{vect}(I_{n+1})$ alors M est nulle et est semblable à elle-même. Supposons donc $M \notin \text{vect}(I_{n+1})$, en utilisant la question précédente, il existe $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\tilde{M} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tel que M soit semblable à $M' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline C & \tilde{M} \end{array} \right)$. Comme la trace est un invariant de similitude, $\text{tr}(M) = \text{tr}(M') = 0 + \text{tr}(\tilde{M})$. On en déduit que $\tilde{M}$ est une matrice carrée de taille n et de trace nulle. On peut donc appliquer $\mathcal{P}(n)$ à $\tilde{M}$, $\tilde{M}$ est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle : il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\tilde{M} = PNP^{-1}$ où $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec la diagonale de N nulle. Ainsi, $M' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline C & PNP^{-1} \end{array} \right)$. Posons $Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array} \right)$, alors par compatibilité des produits par blocs, $Q \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array} \right) = I_{n+1}$. Ce qui prouve que Q est inversible et que son inverse est $Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array} \right) = I_{n+1}$. Encore une fois par compatibilité des produits par blocs, $Q^{-1} \tilde{M} Q = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \star \\ \hline \star & N \end{array} \right) = \tilde{N}$ Donc M est semblable $\tilde{M}$ qui elle-même est semblable à $\tilde{N}$. Par transitivité, M est semblable à $\tilde{N}$, une matrice ne contenant que des zéros sur la diagonale. Dès lors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
15. Soit $(M, M', \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$,

$$\varphi(M + \lambda M') = (M + \lambda M')D - D(M + \lambda M') = MD + \lambda M'D - DM - \lambda DM = (MD - DM) + \lambda(M'D - DM') = \varphi(M) + \lambda \varphi(M')$$

Donc φ est linéaire et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Soit $M \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $MD = DM$. Notons $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $D = (d_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, calculons le coefficient (i, j) de $MD = DM$:

$$\sum_{k=1}^n m_{i,k} d_{k,j} = m_{i,j} d_{j,j} = \sum_{k=1}^n d_{i,k} m_{k,j} = d_{i,i} m_{i,j}$$

Ainsi, $m_{i,j}(d_{j,j} - d_{i,i}) = 0$, comme $i \neq j$, $d_{i,i} \neq d_{j,j}$, donc $m_{i,j} = 0$ et ce pour tout (i, j) tel que $i \neq j$. Ainsi, M est une matrice diagonale. En notant Diag_n l'ensemble des matrices diagonales, on a prouvé que $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Diag}_n$. Réciproquement, si $M \in \text{Diag}_n$, alors $MD = DM$ (deux matrices diagonales commutent), donc $\varphi(M) = MD - DM = 0_n$. Donc $M \in \text{Ker}(\varphi)$. On a donc montré que $\text{Diag}_n = \text{Ker}(\varphi)$. Or une base de Diag_n est $\mathcal{B}_D = (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ ³.

Soit $N = (n_{i,j}) \in \text{Im}(\varphi)$, alors, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $N = MD - DM$. Notons que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, en reprenant le calcul de MD et DM , $n_{i,i} = m_{i,i}d_{i,i} - d_{i,i}m_{i,i} = 0$. Ainsi, N est une matrice dont la diagonale est nulle. Notons Z le SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé de toutes les matrices ayant des éléments diagonaux nuls. On a montré que $\text{Im}(N) \subset Z$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(n)) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = n^2 - n$. Et une base de Z est $\mathcal{B}_Z = (E_{i,j})_{i \neq j}$ ⁴, donc $\dim(Z) = |\mathcal{B}_Z| = n^2 - n$. Par inclusion et égalité des dimension $\text{Im}(\varphi) = Z$ a pour base $\mathcal{B}_Z$.

16. Soit $M \in \mathbb{K}[D]$, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $M = P(D)$. Comme combinaison linéaire de matrices diagonales, M est diagonale donc commute avec D . Ainsi, $M \in \text{Ker}(\varphi)$. Par conséquent, $\mathbb{K}[D] \subset \text{Ker}(\varphi)$. Réciproquement,

3. $\mathcal{B}_D$ est une famille libre car incluse dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}_D \subset \text{Diag}_n$, donc $\text{vect}(\mathcal{B}_D) \subset \text{Diag}_n$, de plus, toute matrice diagonale M peut s'écrire $M = \sum_{k=1}^n m_{k,k} E_{k,k}$, donc $\text{Diag}_n \subset \text{vect}(\mathcal{B}_D)$.

4. En effet, $\mathcal{B}_Z$ (qui n'est pas un canapé) est une famille libre car incluse dans la base canonique, $\mathcal{B}_Z \subset Z$, donc $\text{vect}(\mathcal{B}_Z) \subset Z$. De plus, soit $M = (m_{i,j}) \in Z$. Alors $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} E_{i,j} = \sum_{i \neq j} m_{i,j} E_{i,j} \in \text{vect}(\mathcal{B}_Z)$

soit $M \in \text{Ker}(\varphi)$, alors on a vu que M est diagonale. Notons $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ les éléments diagonaux de M et $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ les éléments diagonaux de D . Comme les éléments de $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ sont deux à deux distincts, considérons,

$$P = \sum_{i=1}^n m_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{X - d_k}{d_i - d_k} \in \mathbb{R}[X]$$

Remarquons alors que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(d_i) = m_i$, notons $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ Alors

$$P(D) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \begin{pmatrix} d_1^k & & & \\ 0 & d_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(d_1) & 0 & & \\ 0 & P(d_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(d_n) \end{pmatrix} = M$$

Ceci prouve que $M \in \mathbb{R}[D]$. Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) \subset \mathbb{R}[D]$, comme on a déjà montré l'inclusion réciproque, $\text{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}[D]$.

17. Soit $M \in K$, alors d'après la question 14, il existe P une matrice inversible et N une matrice avec une diagonale nulle telles que $M = P^{-1}NP$. Comme N a une diagonale nulle, d'après la question 14, $N \in \text{Im}(\varphi)$. Donc il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $N = AD - DA$. Donc

$$M = P^{-1}(AD - DA)P = P^{-1}ADP - P^{-1}ADP = (P^{-1}AP)(P^{-1}DP) - (P^{-1}DP)(P^{-1}AP) \in L$$

On a donc bien montré que $K \subset L$.